Théorie des poutres.
Quelques exemples de calculs.

Jean Fourcade

1) <u>Théorie des poutres</u> :

On appelle "poutre" un solide engendré par des surfaces que l'on nomme "sections droites" telles que :

- Les centres de gravité des sections, appelée "ligne moyenne" forme une courbe continue et dérivable.
- Les sections perpendiculaires à la courbe moyenne varient de manière continue et lente.
- Les dimensions des sections sont petites par rapport à la longueur de la poutre.

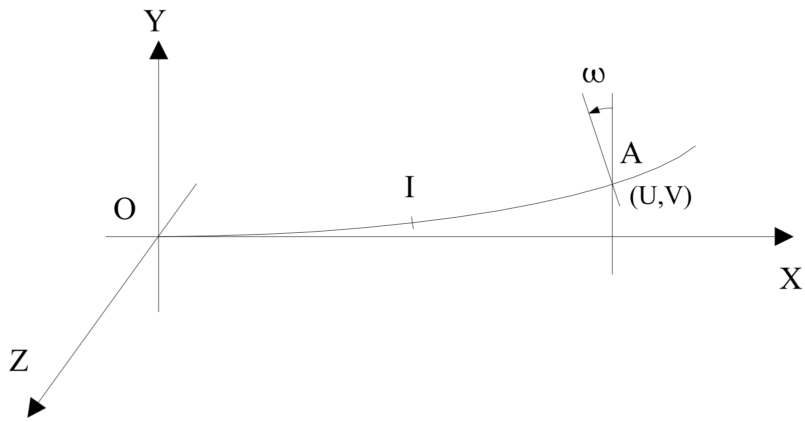
On appelle fibre un volume généré par une portion dS de section droite suivant une courbe parallèle à la courbe moyenne. La fibre neutre est la fibre générée par la courbe moyenne elle-même.

La courbe moyenne avant déformation est supposée droite et repérée par l'axe X. On considère que la poutre subit des forces suivant l'axe Y et X. La poutre ne se déforme donc que dans le plan X-Y.

Au final une poutre se modélise donc par :
- une fibre neutre seule caractérisée par sa longueur et une hauteur $y(x)$ si la poutre n'est pas droite,
- une section $S(x)$ et son moment quadratique $I_Z(x)$.

La poutre transmet des efforts normaux suivant l'axe X (notés *N*), des efforts tranchants (ou de cisaillement) suivant Y (notés *T*) et des moments suivant Z (notés *M*).

Le champs de déplacement se résume à trois inconnues qui sont : U et V les déplacements respectivement suivant X et Y et ω la rotation autour de Z caractérisant la flexion.



Nous calculerons les efforts de cohésions en utilisant la convention des efforts à droite : on considère les efforts qu'exerce la partie droite de la poutre sur la partie gauche.

Ainsi la règle pratique de calcul des efforts au point *I* est la suivante :

- La résultante (*N* suivant X et *T* suivant Y) est égale à la somme de toutes les forces extérieures appliquées à la poutre au delà de *I* (X croissant),
- le moment résultant (*M* suivant Z) est égal au moment calculé au centre de gravité de la section en *I* de toutes les forces extérieures appliquées à la poutre au delà de *I* (X croissant).

Les lois de comportement donnent :

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{N}{ES} \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{M}{EI} \qquad \frac{\partial V}{\partial x}=\omega+\frac{T}{GS}$$

avec :

- E le module de Young (ou module d'élasticité) du matériaux constituant la poutre. Ce coefficient relie la contrainte de traction (terme $\frac{N}{S}$ de la première équation) et la déformation (terme $\frac{\partial U}{\partial x}$). Le module de Young à la dimension d'une contrainte et est exprimé généralement en MPa ou en daN/mm².

- G le module de cisaillement. Ce coefficient caractérise les déformations causées par les efforts de cisaillement. Le module de cisaillement à également la dimension d'une contrainte. Dans le cas de matériaux isotropes, le module de cisaillement est relié au module d'élasticité par la relation :

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

avec ν le coefficient de poisson. Celui-ci vaut pour un matériaux quelconque 0,3.

- I le moment quadratique de la section suivant Z défini par :

$$I=\int_S y^2 ds$$

En intégrant la première équation on obtient le déplacement suivant l'axe de la poutre. En intégrant la deuxième équation on obtient les rotations entre les sections. En intégrant enfin la dernière équation on obtient la flèche.

La contrainte que subit le matériau à une distance y de la ligne moyenne est donnée par l'équation :

$$\sigma=\frac{N}{S}-\frac{M}{I}y$$

Soit y_{min} et y_{min} les positions des fibres externe inférieures et supérieures. La contraint maximum subie par le matériaux est :

$$\sigma_m=max(\frac{N}{S}-\frac{M}{I}y_{min},\frac{N}{S}-\frac{M}{I}y_{max})$$

2) <u>Poutre composite</u> :

2.1) <u>Cas général</u> :

Les lois de comportement doivent intégrer le fait que les modules de Young et de cisaillement sont hétérogènes.

On introduit les quantités suivantes :

- Ligne moyenne définie par : $\int E_i y dS$

- La rigidité équivalente de traction : $[ES]=\int E_i dS$

- La rigidité équivalente de flexion : $[EI]=\int E_i y^2 dS$

- La rigidité équivalente de cisaillement : $[GS]=\int G_i\,dS$

Les lois de comportement s'écrivent alors :

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{N}{[ES]} \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{M}{[EI]} \qquad \frac{\partial V}{\partial x}=\omega+\frac{T}{[GS]}$$

La contrainte que subit le matériaux *i* à une distance *y* de la ligne moyenne est :

$$\sigma_i=E_i\left(\frac{N}{[ES]}-\frac{M}{[EI]}y\right)$$

2.2) <u>Cas de fibres unidirectionnelles</u> :

Soit un composite constitué de fibres unidirectionnelles enrobées dans une matrice. Lorsque le composite est soumis à une force de traction, les déformations de l'ensemble, de la fibre et de la matrice sont égaux. On peut donc écrire :

$$\epsilon_c=\epsilon_f=\epsilon_m$$

La surface totale de la section du composite est la somme de la surface des fibres et de la matrice :

$$A_c=A_f+A_m$$

L'effort normal subi par le composite est la somme des efforts subis par la fibre et la matrice :

$$N_c=N_f+N_m$$

Les contraintes subies par le composite, la fibre et la matrice sont par définition :

$$\sigma_c=\frac{N_c}{A_c} \qquad \sigma_f=\frac{N_f}{A_f} \qquad \sigma_m=\frac{N_m}{A_m}$$

On déduit :

$$\sigma_c A_c=\sigma_f A_f+\sigma_m A_m$$

En introduisant la relation déformation-contrainte dont le rapport définit le module de Young du matériaux, on obtient :

$$\epsilon_c E_c A_c=\epsilon_f E_f A_f+\epsilon_m E_m A_m$$

Ce rapport se simplifie sous la forme :

$$E_c A_c=E_f A_f+E_m A_m$$

On note V_f le pourcentage de fibre défini par :

$$V_f=\frac{A_f}{A_c}$$

On déduit :

$$E_c=E_f V_f+E_m(1-V_f)$$

La contrainte maximale σ_{max} que peut subir le composite est atteinte lors de la rupture des fibres. Notons σ_f cette dernière contrainte. Nous pouvons écrire :

$$\sigma_{max} = V_f \sigma_f + (1 - V_f) \sigma_m$$

avec σ_m la contrainte correspondante subie par la matrice. Calculons celle-ci à partir de la déformation. De $\epsilon_f = \epsilon_m$ on tire :

$$\frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{\sigma_m}{E_m}$$

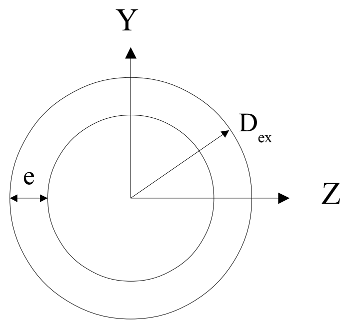
D'où l'expression de la contrainte maximum admissible :

$$\sigma_{max} = \sigma_f [V_f + (1 - V_f) \frac{E_m}{E_f}]$$

3) <u>Calcul de quelques moments quadratiques</u> :

3.1) <u>Tube rond</u> :

Un tube rond est caractérisé par un diamètre extérieur D_{ex} et une épaisseur *e*.



On déduit la valeur du diamètre intérieur :

$$D_{in} = D_{ex} - 2e$$

La surface de la section vaut :

$$S = \frac{\pi}{4}(D_{ex}^2 - D_{in}^2)$$

Le moment quadratique I_y vaut :

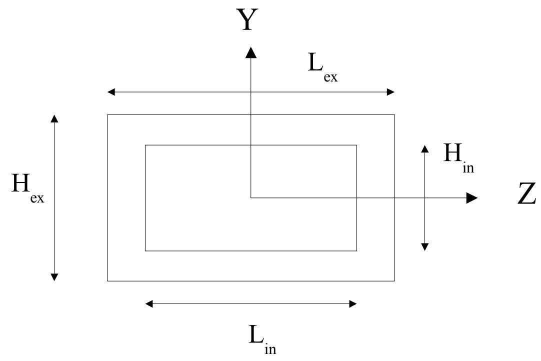
$$I_y = 4 \int_{\frac{D_{in}}{2}}^{\frac{D_{ex}}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \alpha)^2 \, r \, d\alpha \, dr$$

soit :

$$I_y = \frac{\pi}{64}(D_{ex}^4 - D_{in}^4)$$

3.2) <u>Tube rectangulaire</u> :

Un tube rectangulaire est caractérisé par ses largeurs extérieure et intérieure suivant Z notés L_{ex} et L_{in} et ses hauteurs H_{ex} et H_{in} suivant Y.



La surface de la section vaut :

$$S = L_{ex} H_{ex} - L_{in} H_{in}$$

Le quart du moment quadratique est la somme de celui de la paroi verticale de 0 à H_{ex} et de la paroi horizontale de 0 à H_{in}. Le moment quadratique I_y vaut donc :

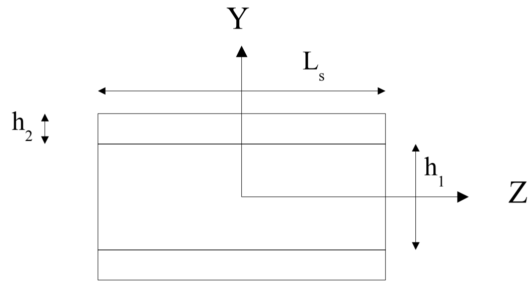
$$I_y = 4 \int_{\frac{L_{in}}{2}}^{\frac{L_{ex}}{2}} \int_0^{\frac{H_{ex}}{2}} y^2 \, dy \, dx + 4 \int_{\frac{H_{in}}{2}}^{\frac{H_{ex}}{2}} \int_0^{\frac{L_{in}}{2}} y^2 \, dy \, dx$$

soit :

$$I_y = \frac{1}{12} (L_{ex} H_{ex}^3 - L_{in} L_{in}^3)$$

3.3) <u>Matériaux sandwich</u> :

On considère le matériaux sandwich formé d'une âme d'épaisseur h_1 et de deux semelles d'épaisseurs h_2. La largeur est notée L_s.



La hauteur totale du matériaux est :

$$h = h_1 + 2 h_2$$

La surface de l'âme vaut :

$$S_1 = L_s h_1$$

La poutre étant symétrique la ligne moyenne se situe au centre de la lame.

Notons I_{y1} et I_{y2} les moments quadratiques par rapport à la ligne moyenne respectivement de l'âme et de chaque semelle.

Le moment quadratique I_{y1} vaut :

$$I_{y1} = \frac{L_s h_1^3}{12}$$

Le moment quadratique I_{y2} se calcule en utilisant le théorème de Huygens :

$$I_{y2} = \frac{L_s h_2^3}{12} + L_s h_2 \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right)^2$$

Calculons à présent le terme $[GS]$. Celui-ci est calculé uniquement en réduisant l'intégrale à la section de l'âme. En notant G_1, le module de cisaillement de celle-ci, on obtient :

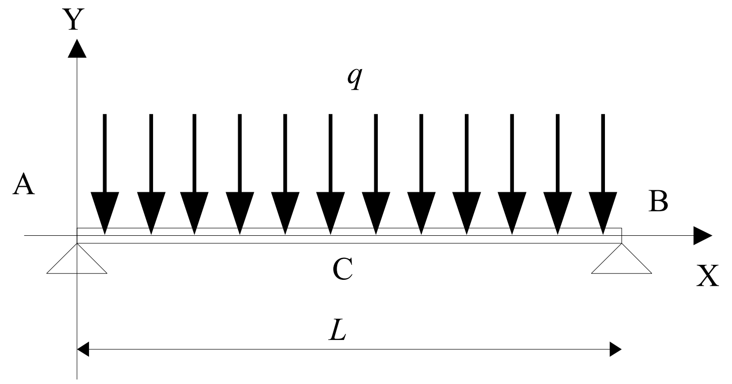
$$[GS] = G_1 S_1$$

4) Quelques exemples de flexions :

Considérons une poutre de rigidité de flexion EI et de rigidité de cisaillement GS et étudions quelques cas de chargement. Nous avons utilisé le logiciel de calcul formel Mapple pour intégrer les équations et résoudre les conditions aux limites. Les résultats sont fournis en annexe.

4.1) Appuie en deux points avec une charge répartie :

Le schéma est représenté ci-dessous :



Notons q la densité linéique de force. La force totale appliquée est :

$$F = q\,L$$

Nous supposerons la poutre en appuie sur des rotules. On déduit que les efforts de liaison se résument à deux forces R_A et R_B . Étant donné la symétrie des efforts, on déduit que les résultantes ont même amplitude. On obtient finalement :

$$R_A = \frac{qL}{2} \quad ; \quad R_B = \frac{qL}{2}$$

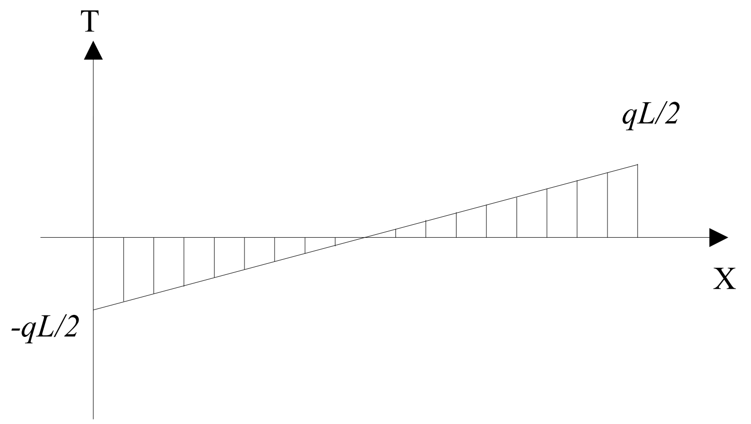
Pour calculer l'effort tranchant en un point situé à la distance x de A, on somme toutes les forces situées à droite de ce point. Soit :

$$T = R_B - \int_x^L q\,d\,l$$

On obtient :

$$T = -q\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

On en déduit le diagramme de l'effort tranchant :



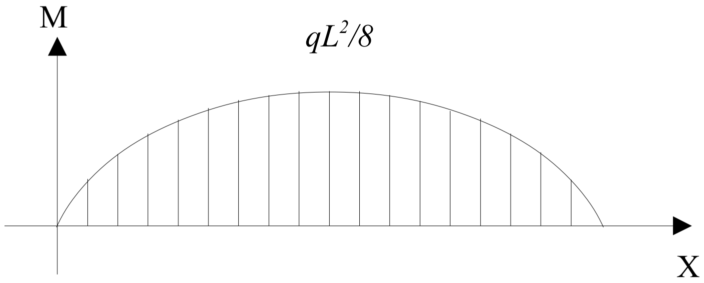
Pour calculer le moment de flexion au point x, on calcule le moment en ce point de toutes les forces situées à droite de ce point. Soit :

$$M=R_A(L-x)-\int_x^L q(L-l)\,dl$$

On obtient :

$$M=\frac{q\,x}{2}(L-x)$$

On déduit le diagramme de l'effort tranchant :



Les équations différentielles qui permettent de calculer la déformée s'écrivent alors :

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{q\,x(L-x)}{2\,EI} \qquad [Eq\,1]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\omega-\frac{q(\frac{L}{2}-x)}{GS} \qquad [Eq\,2]$$

Les conditions aux limites se déduisent du système de fixation. Les déplacements en A et B son nul, soit :

$$v(A)=0 \quad [Eq\,3]$$
$$v(B)=0 \quad [Eq\,4]$$

La résolution donne (voir annexe) :

- La rotation à une x distance du point A :

$$\omega(x)=-\frac{1}{24}\frac{q(-2x+L)(-2x^2+2Lx+L^2)}{EI} \quad \text{[ligne 8]}$$

- La flèche à une distance x du point A :

$$v(x)=-\frac{1}{24}\frac{q\,x(L-x)(L^2+Lx-x^2)}{EI}-\frac{1}{2}\frac{q\,x(L-x)}{GS} \quad \text{[ligne 10]}$$

- La flèche au point C :

$$v(C)=-\frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}-\frac{1}{8}\frac{qL^2}{GS} \quad \text{[ligne 12]}$$

- La rotation au point A :

$$\omega(A) = -\frac{1}{24}\frac{q L^3}{EI} \quad \text{[ligne 13]}$$

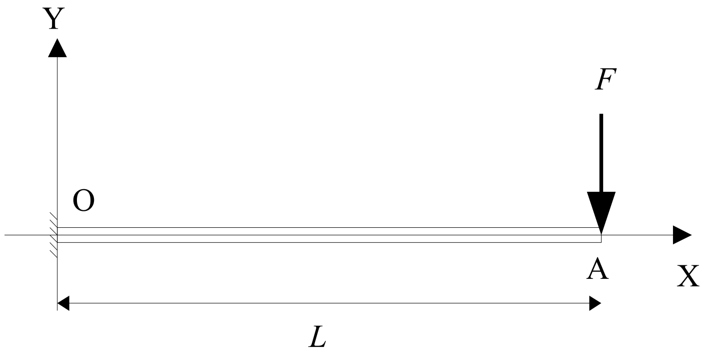
- La rotation au point B. Elle se déduit par symétrie :

$$\omega(B) = \frac{1}{24}\frac{q L^3}{EI}$$

On remarque dans l'expression de la valeur de la flèche en C le terme de déplacement dû au moment fléchissant et le terme dû à l'effort tranchant.

4.2) <u>Encastrement</u> :

Le schéma de la poutre avec son chargement est représenté ci-dessous. Soit F le module de la force appliqué à l'extrémité de la poutre.



Calculons les efforts des liaisons. Ils se résument à une résultante R_O et un moment M_O au point O. Nous avons :

$$R_O + T(O) = 0 \quad \text{et} \quad M_O + M(O) = 0$$

avec $T(O)$ et $M(O)$ respectivement l'effort tranchant et le moment fléchissant à O.

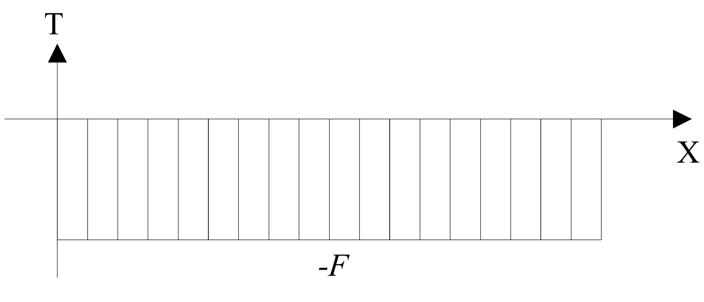
On obtient :

$$R_O = F \quad , \quad M_O = F\,L$$

L'effort tranchant est donc :

$$T = -F$$

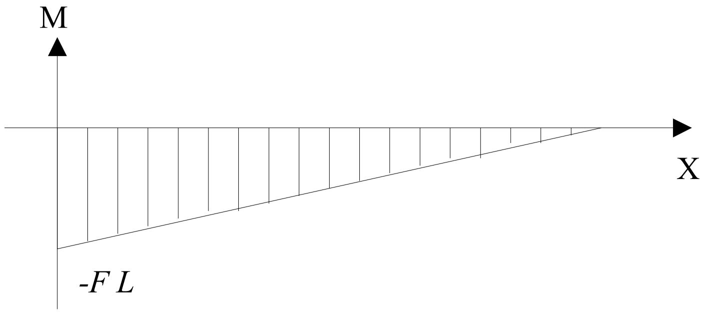
Son diagramme est le suivant :



Calculons le moment fléchissant en un point situé à la distance x de l'encastrement. Nous avons :

$$M = -F(L - x)$$

Son diagramme est donc :



On déduit les équations différentielles qui permettent de calculer la déformée :

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{F(L-x)}{EI} \quad [Eq\,5]$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \omega - \frac{F}{GS} \quad [Eq\,6]$$

Les conditions aux limites en O (encastrement) donnent :

$$v(O)=0 \quad [Eq\,7]$$
$$\omega(O)=0 \quad [Eq\,8]$$

On obtient :

- La rotation à une x distance du point O :

$$\omega(x) = -\frac{1}{2}\frac{F\,x(2L-x)}{EI} \quad \text{[ligne 21]}$$

- La flèche à une distance x du point O :

$$v(x) = -\frac{1}{6}\frac{F\,x^2(3L-x)}{EI} - \frac{F\,x}{GS} \quad \text{[ligne 23]}$$

- La flèche au point A :

$$v(A) = -\frac{1}{3}\frac{F\,L^3}{E\,I} - \frac{F\,L}{GS} \quad \text{[ligne 25]}$$

- La rotation au point A :

$$\omega(A) = -\frac{1}{2}\frac{F\,L^2}{EI} \quad \text{[ligne 26]}$$

Calculons la raideur équivalente. Par définition nous avons :

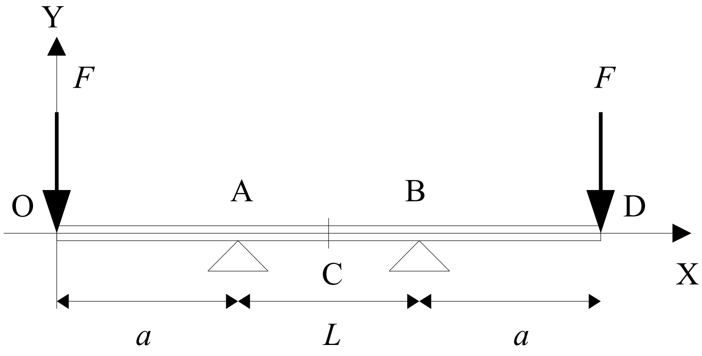
$$F = K_l\,|v(A)|$$

La raideur s'exprime donc par :

$$\frac{1}{K_l}=\frac{L^3}{3\,EI}+\frac{L}{GS}$$

4.3) <u>Appuie en deux points avec une charge à chaque extrémité</u> :

Le schéma de la poutre est donné ci-dessous :

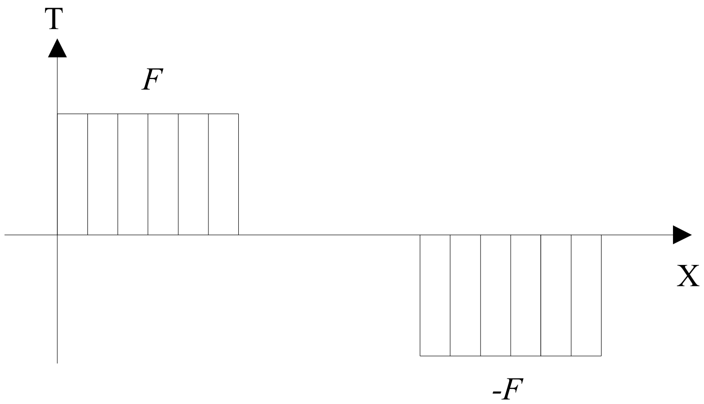


Les efforts de liaison se résument à deux résultantes en A et B. On obtient étant donnée la symétrie de la figure :

$$R_A=F \quad ; \quad R_D=F$$

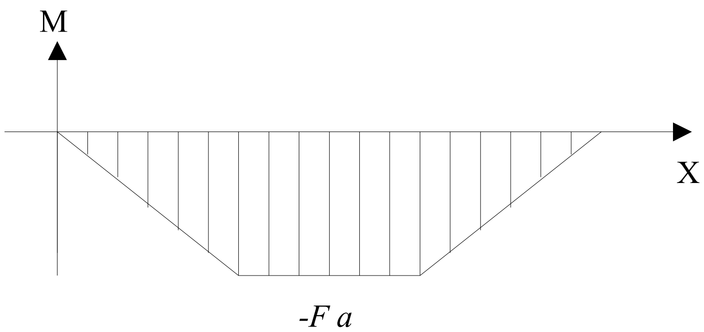
On déduit l'expression de l'effort tranchant : $T_{BD}=-F \quad ; \quad T_{AB}=0 \quad ; \quad T_{OA}=F$

Le diagramme de l'effort tranchant est donné par :



Le moment fléchissant s'exprime par : $M_{BD}=-F\,(L+2\mathrm{a}-x) \quad ; \quad M_{AB}=-Fa \quad ; \quad M_{OA}=-Fx$

Son diagramme est le suivant :



On intègre les équations différentielles pour x variant entre O et A (indice 1) puis entre A et B (indice 2). La symétrie nous permet de déduire que les déformées des deux extrémités sont identiques au signe prés.

On obtient :

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} = -\frac{F\,x}{EI} \qquad [Eq\,9]$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \omega_1 + \frac{F}{GS} \qquad [Eq\,10]$$
$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = -\frac{F\,a}{EI} \qquad [Eq\,11]$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \omega_2 \qquad [Eq\,12]$$

Les conditions aux limites sont :

$$v_1(A) = 0 \qquad [Eq\,13]$$
$$v_2(A) = 0 \qquad [Eq\,14]$$
$$\omega_2(C) = 0 \qquad [Eq\,15]$$
$$\omega_1(A) = \omega_2(A) \qquad [Eq\,16]$$

On obtient :

- La rotation à une x distance du point O :

si $x < a$ $\qquad \omega(x) = \frac{1}{2}\frac{F(-x^2 + a^2 + a\,L)}{EI}$ [ligne 40]

si $a < x < \frac{L}{2}$ $\qquad \omega(x) = \frac{1}{2}\frac{F\,a(-2\,x + 2\,a + L)}{EI}$ [ligne 44]

- La flèche à une distance x du point O :

si $x < a$ $\qquad v(x) = -\frac{1}{6}\frac{F(-x+a)(2\mathrm{a}^2 - a\,x + 3\,a\,L - x^2)}{EI} - \frac{F(-x+a)}{GS}$ [ligne 42]

si $a < x < \frac{L}{2}$ $\qquad v(x) = -\frac{1}{2}\frac{F\,a(-x+a)(a - x + L)}{EI}$ [ligne 45]

- La flèche au point O :

$$v(O) = -\frac{1}{6}\frac{F\,a^2(2\,a + 3\,L)}{EI} - \frac{F\,a}{GS} \quad \text{[ligne 48]}$$

- La flèche au point C :

$$v(C) = \frac{1}{8}\frac{F\,a\,L^2}{EI} \quad \text{[ligne 46]}$$

- La rotation au point O :

$$\omega(O) = \frac{1}{2}\frac{F\,a(a + L)}{EI} \quad \text{[ligne 50]}$$

- La rotation au point A :

$$\omega(A)=\frac{1}{2}\frac{F\,a\,L}{EI} \quad \text{[ligne 51]}$$

La raideur équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{K_l}=\frac{a^2}{6\,E\,I}(2\mathrm{a}+3\mathrm{L})+\frac{a}{GS}$$

Quand L tends vers 0, la raideur de cette poutre tends vers celle encastrée.

Considérons à présent le même chargement d'une poutre à la section rectangulaire de hauteur h constante et de largeur l constante entre A et B mais variant linérairement de O à A et de B à D suivant la loi :

$$l(x)=l\left(1+\frac{(l-l_0)}{l\,a}(x-a)\right)$$

La largeur passe donc de l_0 en O à l en A. Notons :

$$k=\frac{l-l_0}{l\,a}$$

Le moment quadratique entre O et A s'écrit :

$$I(x)=4\int_0^{\frac{h}{2}}\int_0^{\frac{l(x)}{2}} y^2\,dy\,dx$$

Soit :

$$I(x)=I(1+k(x-a)) \quad \text{avec} \quad I=4\int_0^{\frac{h}{2}}\int_0^{\frac{l}{2}} y^2\,dy\,dx$$

I est le moment quadratique de la poutre entre A et B .

De même la section droite s'écrit :

$$S(x)=S(1+k(x-a))$$

On déduit les nouvelles valeurs des rigidités :

$$EI(x)=EI(1+k(x-a)) \quad \text{et} \quad GS(x)=GS(1+k(x-a))$$

En intégrant les équations avec ces nouvelles valeurs, on obtient :

- La rotation à une x distance du point O :

si $x<a$ $\quad \omega(x)=\dfrac{F(\ln(1+k\,x-k\,a)(1-k\,a)+k(a-x))}{EI\,k^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{F\,a\,L}{EI}$ [ligne 66]

si $a<x<\dfrac{L}{2}$ $\quad \omega(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{F\,a(-2x+2a+L)}{EI}$ [ligne 71]

- La flèche à une distance x du point O :

si $x<a$

$$v(x)=\frac{F\ln(1+kx-ka)(-1+ka)(-1-kx+ka)}{EIk^3}-\frac{1}{2}\frac{F(a-x)(3ka+k^2aL-2-kx)}{EIk^2}+\frac{F\ln(1+kx-ka)}{GSk} \quad [69]$$

si $a<x<\frac{L}{2}$ $\quad v(x)=-\frac{1}{2}\frac{Fa(-x+a)(a-x+L)}{EI}$ [ligne 72]

- La flèche au point O :

$$v(O)=-\frac{1}{2}\frac{F(\ln(1-ka)(-2+4ka-2k^2a^2)-2ka+3k^2a^2)}{EIk^3}-\frac{1}{2}\frac{Fa^2L}{EI}+\frac{F\ln(1-ka)}{GSk} \quad [75]$$

- La flèche au point C :

$$v(C)=\frac{1}{8}\frac{FaL^2}{EI} \quad \text{[ligne 73]}$$

- La rotation au point O :

$$\omega(O)=\frac{F(\ln(1-ka)(1-ka)+ka)}{EIk^2}+\frac{1}{2}\frac{FaL}{EI} \quad \text{[ligne 78]}$$

- La rotation au point A :

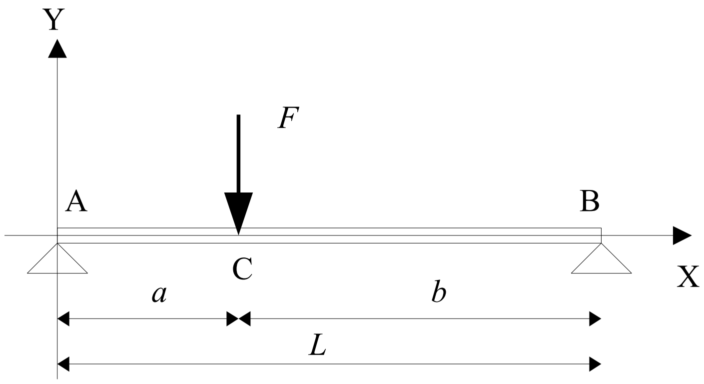
$$\omega(A)=\frac{1}{2}\frac{FaL}{EI} \quad \text{[ligne 80]}$$

La raideur équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{K_l}=\frac{1}{2}\frac{(\ln(1-ka)(-2+4\text{ka}-2\text{k}^2a^2)-2\text{ka}+3k^2a^2)}{EIk^3}+\frac{1}{2}\frac{a^2L}{EI}-\frac{\ln(1-ka)}{GSk}$$

4.4) <u>Appuie en deux points avec une seule charge</u> :

Le schéma est représenté ci-dessous :



Calculons les efforts des liaisons. Soient R_A et R_B les réactions aux deux points d'appuis.

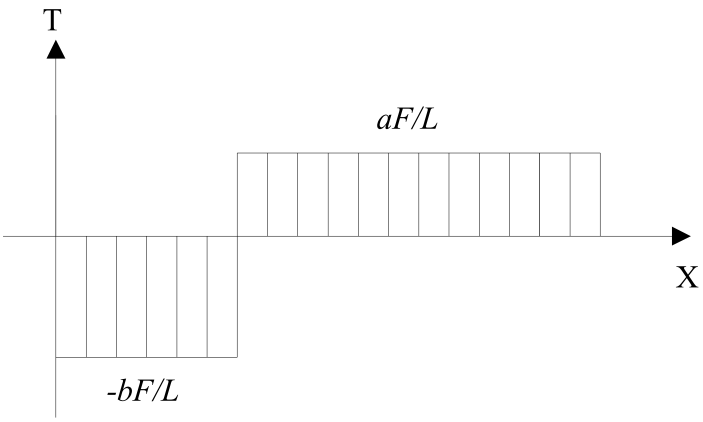
Nous avons :

$$R_A = \frac{b}{L} F \quad ; \quad R_B = \frac{a}{L} F$$

On déduit la valeur de l'effort tranchant :

$$T_{CB} = \frac{a}{L} F \quad ; \quad T_{AC} = -\frac{b}{L} F$$

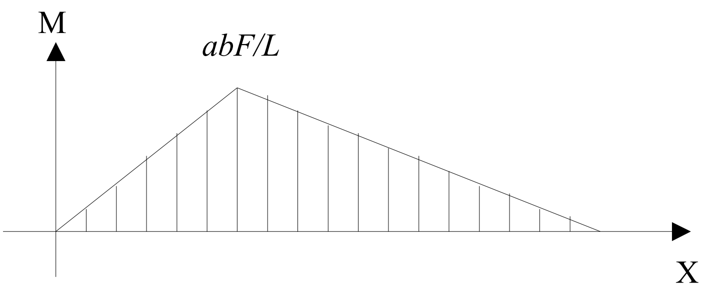
Le diagramme de l'effort tranchant s'exprime par :



Le moment fléchissant s'exprime par :

$$M_{CB} = \frac{aF}{L}(L-x) \quad ; \quad M_{AC} = \frac{bF}{L} x$$

son diagramme est donc :



On obtient les équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} = \frac{b F x}{EI} \qquad [Eq\,17]$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \omega_1 - \frac{b F}{GS(a+b)} \qquad [Eq\,18]$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = a F \frac{(a+b-x)}{EI} \qquad [Eq\,19]$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \omega_2 + \frac{a F}{GS(a+b)} \qquad [Eq\,20]$$

Les conditions aux limites sont :

$$v_1(A)=0 \qquad [Eq\,21]$$
$$v_2(B)=0 \qquad [Eq\,22]$$
$$v_1(C)=v_2(C) \qquad [Eq\,23]$$
$$\omega_1(C)=\omega_2(C) \qquad [Eq\,24]$$

La résolution donne :

- La rotation à une x distance du point A :

si $x<a$ $\qquad \omega(x)=-\frac{1}{6}\frac{bF(L^2-b^2-3x^2)}{EI\,L}$ [ligne 94]

si $a<x$ $\qquad \omega(x)=-\frac{1}{6}\frac{a\,F(-6\,x\,L+2\,L^2+a^2+3\,x^2)}{EI\,L}$ [ligne 98]

- La flèche à une distance x du point A :

si $x<a$ $\qquad v(x)=-\frac{1}{6}\frac{x\,b\,F(L^2-b^2-x^2)}{EI\,L}-\frac{b\,F\,x}{GS\,L}$ [ligne 96]

si $a<x$ $\qquad v(x)=-\frac{1}{6}\frac{F(L-x)(-(x-a)^2+2\,b\,x)}{EI\,L}-\frac{F\,a(L-x)}{GS\,L}$ [ligne 100]

- La flèche au point C :

$$v(C)=-\frac{1}{3}\frac{F\,a^2\,b^2}{EI\,L}-\frac{a\,b\,F}{GS\,L} \quad \text{[ligne 103]}$$

- La rotation au point A :

$$\omega(A)=-\frac{1}{6}\frac{Fab}{EI\,L}(L+b) \quad \text{[ligne 105]}$$

- La rotation au point B :

$$\omega(B)=\frac{1}{6}\frac{F\,a\,b}{EI\,L}(L+a) \quad \text{[ligne 106]}$$

5) <u>Résultats Maple</u> :

Calcul déformées poutres

4.1) Appuie en deux points avec charge répartie

```
> restart ;
```

[Eq 1]

```
> dw := q*x/2*(L-x)/EI ;
```

$$dw := \frac{1}{2} \frac{q\,x\,(L-x)}{EI} \quad (1)$$

[Eq 2]

```
> dv := w -q*(L/2-x)/GS ;
```

$$dv := w - \frac{q\left(\frac{1}{2}L-x\right)}{GS} \quad (2)$$

```
> w := int(dw,x) + C ;
```

$$w := \frac{1}{2} \frac{q\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}L\,x^2\right)}{EI} + C \quad (3)$$

```
> v := int(dv,x) + E ;
```

$$v := \frac{1}{2} \frac{q\left(-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}L\,x^3\right)}{EI} + C\,x - \frac{q\left(\frac{1}{2}L\,x-\frac{1}{2}x^2\right)}{GS} + E \quad (4)$$

v(A)=0 [Eq 3]

```
> eq1 := subs(x=0,v)=0 ;
```

$$eq1 := E = 0 \quad (5)$$

v(B)=0 [Eq 4]

```
> eq2 := subs(x=L,v)=0 ;
```

$$eq2 := \frac{1}{24} \frac{q\,L^4}{EI} + C\,L + E = 0 \quad (6)$$

```
> solve({eq1,eq2},{C,E});
```

$$\left\{C = -\frac{1}{24} \frac{q\,L^3}{EI}, E = 0\right\} \quad (7)$$

```
> assign(%) ;
```

w(x)

```
> factor(w) ;
```

$$-\frac{1}{24} \frac{q\,(-2\,x+L)\,(-2\,x^2+2\,L\,x+L^2)}{EI} \quad (8)$$

v(x)

```
> vx := factor(v) ;
```

$$vx := -\frac{1}{24} \frac{q\,x\,(L-x)\,(GS\,L^2+GS\,x\,L-x^2\,GS+12\,EI)}{EI\,GS} \quad (9)$$

```
> vx2 := -1/24*q*x*(L-x)*(L^2+x*L-x^2)/EI-1/2*q*x*(L-x)/GS ;
```

$$vx2 := -\frac{1}{24}\frac{q\,x\,(L-x)\,(L^2+L\,x-x^2)}{EI}-\frac{1}{2}\frac{q\,x\,(L-x)}{GS} \quad \textbf{(10)}$$

```
> simplify(vx2-vx) ;
```

$$0 \quad \textbf{(11)}$$

v(C)

```
> subs(x=L/2,v) ;
```

$$-\frac{5}{384}\frac{q\,L^4}{EI}-\frac{1}{8}\frac{q\,L^2}{GS} \quad \textbf{(12)}$$

w(A)

```
> subs(x=0,w) ;
```

$$-\frac{1}{24}\frac{q\,L^3}{EI} \quad \textbf{(13)}$$

4.2) Encastrement

```
> restart;
```

[Eq 5]

```
> dw := -F*(L-x)/EI ;
```

$$dw := -\frac{F\,(L-x)}{EI} \quad \textbf{(14)}$$

[Eq 6]

```
> dv := w - F/GS ;
```

$$dv := w-\frac{F}{GS} \quad \textbf{(15)}$$

```
> w := int(dw,x) + C ;
```

$$w := -\frac{F\left(L\,x-\frac{1}{2}\,x^2\right)}{EI}+C \quad \textbf{(16)}$$

```
> v := int(dv,x) + E ;
```

$$v := -\frac{F\left(\frac{1}{2}\,L\,x^2-\frac{1}{6}\,x^3\right)}{EI}+C\,x-\frac{F\,x}{GS}+E \quad \textbf{(17)}$$

v(O)=0 [Eq 7]

```
> eq1 := subs(x=0,v)=0 ;
```

$$eq1 := E=0 \quad \textbf{(18)}$$

w(O)=0 [Eq 8]

```
> eq2 := subs(x=0,w)=0 ;
```

$$eq2 := C=0 \quad \textbf{(19)}$$

```
> solve({eq1,eq2},{C,E}) ;
```

$$\{C=0,\,E=0\} \quad \textbf{(20)}$$

```
> assign(%);
```

w(x)

```
> factor(w) ;
```

$$-\frac{1}{2}\frac{F\,x\,(2\,L-x)}{EI} \tag{21}$$

v(x)

```
> vx := factor(v) ;
```

$$vx := -\frac{1}{6}\frac{F\,x\,\left(3\,x\,GS\,L-x^2\,GS+6\,EI\right)}{EI\,GS} \tag{22}$$

```
> vx2 := -1/6*F*x^2*(3*L-x)/EI -F*x/GS ;
```

$$vx2 := -\frac{1}{6}\frac{F\,x^2\,(3\,L-x)}{EI}-\frac{F\,x}{GS} \tag{23}$$

```
> simplify(vx2-vx) ;
```

$$0 \tag{24}$$

v(A)

```
> subs(x=L,v) ;
```

$$-\frac{1}{3}\frac{F\,L^3}{EI}-\frac{F\,L}{GS} \tag{25}$$

w(A)

```
> subs(x=L,w) ;
```

$$-\frac{1}{2}\frac{F\,L^2}{EI} \tag{26}$$

4.3) Appuie en deux points avec une charge à chaque extrémité (largeur constante)

```
> restart ;
```

[Eq 9]

```
> dw1 := -F*x/EI ;
```

$$dw1 := -\frac{F\,x}{EI} \tag{27}$$

[Eq 10]

```
> dv1 := w1 +F/GS ;
```

$$dv1 := w1+\frac{F}{GS} \tag{28}$$

[Eq 11]

```
> dw2 := -F*a/EI ;
```

$$dw2 := -\frac{F\,a}{EI} \tag{29}$$

[Eq 12]

```
> dv2 := w2 ;
```

$$dv2 := w2 \tag{30}$$

```
> w1 := int(dw1,x) + C1 ;
```

$$w1 := -\frac{1}{2}\frac{F\,x^2}{EI}+C1 \tag{31}$$

```
> v1 := int(dv1,x) + E1 ;
```
$$v1 := -\frac{1}{6}\frac{F x^3}{EI} + C1\,x + \frac{F x}{GS} + E1 \quad (32)$$

```
> w2 := int(dw2,x) + C2 ;
```
$$w2 := -\frac{F a x}{EI} + C2 \quad (33)$$

```
> v2 := int(dv2,x) + E2 ;
```
$$v2 := -\frac{1}{2}\frac{F a x^2}{EI} + C2\,x + E2 \quad (34)$$

v1(A)=0 [Eq 13]

```
> eq1 := subs(x=a,v1)=0 ;
```
$$eq1 := -\frac{1}{6}\frac{F a^3}{EI} + C1\,a + \frac{F a}{GS} + E1 = 0 \quad (35)$$

v2(A)=0 [Eq 14]

```
> eq2 := subs(x=a,v2)=0 ;
```
$$eq2 := -\frac{1}{2}\frac{F a^3}{EI} + C2\,a + E2 = 0 \quad (36)$$

w2(C)=0 [Eq 15]

```
> eq3 := subs(x=a+L/2,w2)=0 ;
```
$$eq3 := -\frac{F a \left(a + \frac{1}{2} L\right)}{EI} + C2 = 0 \quad (37)$$

w1(A)=w2(A) [Eq 16]

```
> eq4 := subs(x=a,w1)=subs(x=a,w2) ;
```
$$eq4 := -\frac{1}{2}\frac{F a^2}{EI} + C1 = -\frac{F a^2}{EI} + C2 \quad (38)$$

```
> solve({eq1,eq2,eq3,eq4},{C1,E1,C2,E2});
```
$$\left\{C1 = \frac{1}{2}\frac{F a (a+L)}{EI},\ C2 = \frac{1}{2}\frac{F a (2a+L)}{EI},\ E1 = -\frac{1}{6}\frac{F a \left(2 a^2 GS + 6 EI + 3 a GS L\right)}{EI\, GS},\ E2 = -\frac{1}{2}\frac{F a^2 (a+L)}{EI}\right\} \quad (39)$$

```
> assign(%);
```

w1(x)

```
> factor(w1) ;
```
$$\frac{1}{2}\frac{F\left(-x^2 + a^2 + a L\right)}{EI} \quad (40)$$

v1(x)

```
> v1x := factor(v1) ;
```
(41)

$$v1x := -\frac{1}{6}\,\frac{F\,(-x+a)\,\left(2\,a^2\,GS - a\,x\,GS + 3\,a\,GS\,L + 6\,EI - x^2\,GS\right)}{EI\,GS} \quad \textbf{(41)}$$

```
> v1x2 := -1/6*F*(-x+a)*(2*a^2-a*x+3*a*L-x^2)/EI -F*(-x+a)/GS ;
```

$$v1x2 := -\frac{1}{6}\,\frac{F\,(-x+a)\,\left(2\,a^2 - a\,x + 3\,a\,L - x^2\right)}{EI} - \frac{F\,(-x+a)}{GS} \quad \textbf{(42)}$$

```
> simplify(v1x2-v1x) ;
```

$$0 \quad \textbf{(43)}$$

w2(x)

```
> factor(w2) ;
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{F\,a\,(-2\,x+2\,a+L)}{EI} \quad \textbf{(44)}$$

v2(x)

```
> factor(v2) ;
```

$$-\frac{1}{2}\,\frac{F\,a\,(-x+a)\,(a-x+L)}{EI} \quad \textbf{(45)}$$

v(C)

```
> simplify(subs(x=a+L/2,v2));
```

$$\frac{1}{8}\,\frac{F\,a\,L^2}{EI} \quad \textbf{(46)}$$

v(O)

```
> vo := simplify(subs(x=0,v1)) ;
```

$$vo := -\frac{1}{6}\,\frac{F\,a\,\left(2\,a^2\,GS + 6\,EI + 3\,a\,GS\,L\right)}{EI\,GS} \quad \textbf{(47)}$$

```
> vo2 := -F*a^2*(2*a+3*L)/6/EI-F*a/GS ;
```

$$vo2 := -\frac{1}{6}\,\frac{F\,a^2\,(2\,a+3\,L)}{EI} - \frac{F\,a}{GS} \quad \textbf{(48)}$$

```
> simplify(vo-vo2) ;
```

$$0 \quad \textbf{(49)}$$

w(O)

```
> simplify(subs(x=0,w1)) ;
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{F\,a\,(a+L)}{EI} \quad \textbf{(50)}$$

w(A)

```
> simplify(subs(x=a,w1)) ;
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{F\,a\,L}{EI} \quad \textbf{(51)}$$

4.3) Appuie en deux points avec une charge à chaque extrémité (largeur variable)

```
> restart ;
```

[Eq 9']

```
> dw1 := -F*x/EI/(1+k*(x-a)) ;
```

$$dw1 := -\frac{F\,x}{EI\,(1+k\,(x-a))} \tag{52}$$

[Eq 10"]

```
> dv1 := w1 +F/GS/(1+k*(x-a)) ;
```

$$dv1 := w1 + \frac{F}{GS\,(1+k\,(x-a))} \tag{53}$$

[Eq 11]

```
> dw2 := -F*a/EI ;
```

$$dw2 := -\frac{F\,a}{EI} \tag{54}$$

[Eq 12']

```
> dv2 := w2  ;
```

$$dv2 := w2 \tag{55}$$

```
> w1 := int(dw1,x) + C1 ;
```

$$w1 := -\frac{F\,x}{EI\,k} + \frac{F\ln(1+k\,x-k\,a)}{EI\,k^2} - \frac{F\ln(1+k\,x-k\,a)\,a}{EI\,k} + C1 \tag{56}$$

```
> v1 := int(dv1,x) + E1 ;
```

$$v1 := -\frac{1}{2}\,\frac{F\,x^2}{EI\,k} + \frac{F\ln(1+k\,x-k\,a)}{EI\,k^3} + \frac{F\ln(1+k\,x-k\,a)\,x}{EI\,k^2} - \frac{2\,F\ln(1+k\,x-k\,a)\,a}{EI\,k^2} - \frac{F}{EI\,k^3} - \frac{F\,x}{EI\,k^2} + \frac{2\,F\,a}{EI\,k^2} - \frac{F\,a\ln(1+k\,x-k\,a)\,x}{EI\,k} + \frac{F\,a^2\ln(1+k\,x-k\,a)}{EI\,k} + \frac{F\,a\,x}{EI\,k} - \frac{F\,a^2}{EI\,k} + C1\,x + \frac{F\ln(1+k\,x-k\,a)}{GS\,k} + E1 \tag{57}$$

```
> w2 := int(dw2,x) + C2 ;
```

$$w2 := -\frac{F\,a\,x}{EI} + C2 \tag{58}$$

```
> v2 := int(dv2,x) + E2 ;
```

$$v2 := -\frac{1}{2}\,\frac{F\,a\,x^2}{EI} + C2\,x + E2 \tag{59}$$

v1(A)=0 [Eq 13]

```
> eq1 := subs(x=a,v1)=0 ;
```

$$eq1 := -\frac{1}{2}\,\frac{F\,a^2}{EI\,k} + \frac{F\ln(1)}{EI\,k^3} - \frac{F\ln(1)\,a}{EI\,k^2} - \frac{F}{EI\,k^3} + \frac{F\,a}{EI\,k^2} + C1\,a + \frac{F\ln(1)}{GS\,k} + E1 = 0 \tag{60}$$

v2(A)=0 [Eq 14]

```
> eq2 := subs(x=a,v2)=0 ;
```

$$eq2 := -\frac{1}{2}\,\frac{F\,a^3}{EI} + C2\,a + E2 = 0 \tag{61}$$

w2(C)=0 [Eq 15]

```
> eq3 := subs(x=a+L/2,w2)=0 ;
```

$$eq3 := -\frac{F\,a\left(a+\frac{1}{2}L\right)}{EI}+C2=0 \quad (62)$$

w1(A)=w2(A) [Eq 16]

```
> eq4 := subs(x=a,w1)=subs(x=a,w2) ;
```

$$eq4 := -\frac{F\,a}{EI\,k}+\frac{F\ln(1)}{EI\,k^2}-\frac{F\ln(1)\,a}{EI\,k}+C1=-\frac{F\,a^2}{EI}+C2 \quad (63)$$

```
> solve({eq1,eq2,eq3,eq4},{C1,E1,C2,E2});
```

$$\left\{C1=\frac{1}{2}\,\frac{F\,a\,(2+k\,L)}{EI\,k},\ C2=\frac{1}{2}\,\frac{F\,a\,(2\,a+L)}{EI},\ E1=-\frac{1}{2}\,\frac{F\left(k^2\,a^2-2+2\,k\,a+k^3\,a^2\,L\right)}{EI\,k^3},\ E2=-\frac{1}{2}\,\frac{F\,a^2\,(a+L)}{EI}\right\} \quad (64)$$

```
> assign(%) ;
```

w1(x)

```
> w1x :=  factor(w1) ;
```

$$w1x := \frac{1}{2}\,\frac{F\left(-2\,k\,x+2\ln(1+k\,x-k\,a)-2\ln(1+k\,x-k\,a)\,k\,a+2\,k\,a+k^2\,a\,L\right)}{k^2\,EI} \quad (65)$$

```
> w1x2 := F*(ln(1+k*x-k*a)*(1-k*a)+k*(a-x))/EI/k^2+F/2*a*L/EI;
```

$$w1x2 := \frac{F\left(\ln(1+k\,x-k\,a)\,(1-k\,a)+k\,(a-x)\right)}{EI\,k^2}+\frac{1}{2}\,\frac{F\,a\,L}{EI} \quad (66)$$

```
> simplify(w1x2-w1x) ;
```

$$0 \quad (67)$$

v1(x)

```
> v1x := factor(v1) ;
```

$$\begin{aligned} v1x := \frac{1}{2}\,\frac{1}{EI\,k^3\,GS}\Big(F\big(&-GS\,k^2\,x^2+2\ln(1+k\,x-k\,a)\,GS+2\ln(1+k\,x-k\,a)\,GS\,k\,x \\ &-4\ln(1+k\,x-k\,a)\,GS\,k\,a-2\,GS\,k\,x+2\,GS\,k\,a-2\ln(1+k\,x-k\,a)\,GS\,k^2\,a\,x \\ &+2\ln(1+k\,x-k\,a)\,GS\,k^2\,a^2+4\,GS\,k^2\,x\,a-3\,GS\,k^2\,a^2+GS\,k^3\,x\,a\,L+2\ln(1+k\,x \\ &-k\,a)\,EI\,k^2-GS\,k^3\,a^2\,L\big)\Big) \end{aligned} \quad (68)$$

```
> v1x2 := F*ln(1+k*x-k*a)*(-1+k*a)*(-1-k*x+k*a)/(EI*k^3)-(1/2)*F*
  (a-x)*(3*k*a+k^2*a*L-2-k*x)/(k^2*EI)+F*ln(1+k*x-k*a)/(GS*k) ;
```

$$\begin{aligned} v1x2 := &\frac{F\ln(1+k\,x-k\,a)\,(-1+k\,a)\,(-1-k\,x+k\,a)}{EI\,k^3} \\ &-\frac{1}{2}\,\frac{F\,(a-x)\left(3\,k\,a+k^2\,a\,L-2-k\,x\right)}{k^2\,EI}+\frac{F\ln(1+k\,x-k\,a)}{GS\,k} \end{aligned} \quad (69)$$

```
> simplify(v1x-v1x2) ;
```

(70)

$$0 \tag{70}$$

w2(x)

```
> factor(w2) ;
```

$$\frac{1}{2}\frac{F a(-2x+2a+L)}{EI} \tag{71}$$

v2(x)

```
> factor(v2) ;
```

$$-\frac{1}{2}\frac{F a(a-x)(a-x+L)}{EI} \tag{72}$$

v(C)

```
> simplify(subs(x=a+L/2,v2));
```

$$\frac{1}{8}\frac{F a L^2}{EI} \tag{73}$$

v(O)

```
> vo := simplify(subs(x=0,v1)) ;
```

$$vo := \frac{1}{2}\frac{1}{EI\,k^3\,GS}\left(F\left(2\ln(1-k a)\,GS-4\ln(1-k a)\,a\,k\,GS+2\,GS\,k\,a+2\,a^2\ln(1-k a)\,k^2\,GS-3\,GS\,k^2\,a^2+2\ln(1-k a)\,EI\,k^2-GS\,k^3\,a^2\,L\right)\right) \tag{74}$$

```
> vo2 := -F/2*((ln(1-k*a)*(-2+4*a*k-2*a^2*k^2)-2*k*a+3*k^2*a^2))
  /EI/k^3-F/2/EI*a^2*L+F*ln(1-k*a)/GS/k ;
```

$$vo2 := -\frac{1}{2}\frac{F\left(\ln(1-k a)\left(-2+4\,k\,a-2\,k^2\,a^2\right)-2\,k\,a+3\,k^2\,a^2\right)}{EI\,k^3}-\frac{1}{2}\frac{F\,a^2\,L}{EI}+\frac{F\ln(1-k a)}{GS\,k} \tag{75}$$

```
> simplify(vo-vo2) ;
```

$$0 \tag{76}$$

w(O)

```
> wo := simplify(subs(x=0,w1)) ;
```

$$wo := \frac{1}{2}\frac{F\left(2\ln(1-k a)-2\ln(1-k a)\,k\,a+2\,k\,a+k^2\,a\,L\right)}{k^2\,EI} \tag{77}$$

```
> wo2 := F*(ln(1-k*a)*(1-a*k)+k*a)/EI/k^2+1/2*F*a*L/EI ;
```

$$wo2 := \frac{F\left(\ln(1-k a)\,(1-k a)+k\,a\right)}{EI\,k^2}+\frac{1}{2}\frac{F\,a\,L}{EI} \tag{78}$$

```
> simplify(wo-wo2) ;
```

$$0 \tag{79}$$

w(A)

```
> simplify(subs(x=a,w1)) ;
```

$$\frac{1}{2}\frac{F\,a\,L}{EI} \tag{80}$$

4.4) Appuie en deux points avec une seule charge

```
> restart ;
```

[Eq 17]

```
> dw1 := b*F*x/EI/(a+b) ;
```

$$dw1 := \frac{b\,F\,x}{EI\,(a+b)} \tag{81}$$

[Eq 18]

```
> dv1 := w1 - b*F/GS/(a+b) ;
```

$$dv1 := w1 - \frac{b\,F}{GS\,(a+b)} \tag{82}$$

[Eq 19]

```
> dw2 := a*F*(a+b-x)/EI/(a+b) ;
```

$$dw2 := \frac{a\,F\,(a+b-x)}{EI\,(a+b)} \tag{83}$$

[Eq 20]

```
> dv2 := w2 + a*F/GS/(a+b) ;
```

$$dv2 := w2 + \frac{a\,F}{GS\,(a+b)} \tag{84}$$

```
> w1 := int(dw1,x) + C1 ;
```

$$w1 := \frac{1}{2}\,\frac{b\,F\,x^2}{EI\,(a+b)} + C1 \tag{85}$$

```
> v1 := int(dv1,x) + E1 ;
```

$$v1 := \frac{1}{6}\,\frac{b\,F\,x^3}{EI\,(a+b)} + C1\,x - \frac{b\,F\,x}{GS\,(a+b)} + E1 \tag{86}$$

```
> w2 := int(dw2,x) + C2 ;
```

$$w2 := \frac{a\,F\left(a\,x + b\,x - \frac{1}{2}\,x^2\right)}{EI\,(a+b)} + C2 \tag{87}$$

```
> v2 := int(dv2,x) + E2 ;
```

$$v2 := \frac{a\,F\left(\frac{1}{2}\,a\,x^2 + \frac{1}{2}\,b\,x^2 - \frac{1}{6}\,x^3\right)}{EI\,(a+b)} + C2\,x + \frac{a\,F\,x}{GS\,(a+b)} + E2 \tag{88}$$

v1(A)=0 [Eq 21]

```
> eq1 := subs(x=0,v1)=0 ;
```

$$eq1 := E1 = 0 \tag{89}$$

v2(B)=0 [Eq 22]

```
> eq2 := subs(x=a+b,v2)=0 ;
```

$$eq2 := \frac{a\,F\left(\frac{1}{2}\,a\,(a+b)^2 + \frac{1}{2}\,b\,(a+b)^2 - \frac{1}{6}\,(a+b)^3\right)}{EI\,(a+b)} + C2\,(a+b) + \frac{a\,F}{GS} + E2 = 0 \tag{90}$$

v1(C)=v2(C) [Eq 23]

```
> eq3 := subs(x=a,v1)=subs(x=a,v2) ;
```

$$eq3 := \frac{1}{6}\,\frac{b\,F\,a^3}{EI\,(a+b)} + C1\,a - \frac{b\,F\,a}{GS\,(a+b)} + E1 = \frac{a\,F\left(\frac{1}{3}\,a^3 + \frac{1}{2}\,b\,a^2\right)}{EI\,(a+b)} + C2\,a + \frac{a^2\,F}{GS\,(a+b)} + E2 \tag{91}$$

w1(C)=w2(C) [Eq 24]

```
> eq4:= subs(x=a,w1)=subs(x=a,w2) ;
```

$$eq4 := \frac{1}{2}\,\frac{b\,F\,a^2}{EI\,(a+b)} + C1 = \frac{a\,F\left(\frac{1}{2}\,a^2 + b\,a\right)}{EI\,(a+b)} + C2 \tag{92}$$

```
> solve({eq1,eq2,eq3,eq4},{C1,E1,C2,E2});
```

$$\left\{C1 = -\frac{1}{6}\,\frac{a\,F\,b\,(a+2\,b)}{EI\,(a+b)},\ C2 = -\frac{1}{6}\,\frac{a\,F\,(3\,a^2+4\,b\,a+2\,b^2)}{EI\,(a+b)},\ E1 = 0,\ E2 = -\frac{1}{6}\,\frac{a\,F\,(-a^2\,GS+6\,EI)}{EI\,GS}\right\} \tag{93}$$

```
> assign(%) ;
```

w1(x)

```
> factor(w1) ;
```

$$-\frac{1}{6}\,\frac{b\,F\,(-3\,x^2+a^2+2\,b\,a)}{EI\,(a+b)} \tag{94}$$

v1(x)

```
> v1x := factor(v1) ;
```

$$v1x := -\frac{1}{6}\,\frac{b\,F\,x\,(-x^2\,GS+a^2\,GS+2\,a\,GS\,b+6\,EI)}{EI\,(a+b)\,GS} \tag{95}$$

```
> v1x2 := -1/6*x*b*F*(-x^2+a^2+2*a*b)/EI/(a+b) -b*F*x/GS/(a+b) ;
```

$$v1x2 := -\frac{1}{6}\,\frac{x\,b\,F\,(-x^2+a^2+2\,b\,a)}{EI\,(a+b)} - \frac{b\,F\,x}{GS\,(a+b)} \tag{96}$$

```
> simplify(v1x2-v1x) ;
```

$$0 \tag{97}$$

w2(x)

```
> factor(w2) ;
```

$$-\frac{1}{6}\,\frac{a\,F\,(-6\,a\,x-6\,b\,x+3\,x^2+3\,a^2+4\,b\,a+2\,b^2)}{EI\,(a+b)} \tag{98}$$

v2(x)

```
> v2x := factor(v2) ;
```

$$v2x := -\frac{1}{6}\,\frac{a\,F\,(a+b-x)\,(-a^2\,GS+2\,x\,GS\,a-x^2\,GS+2\,x\,GS\,b+6\,EI)}{EI\,(a+b)\,GS} \tag{99}$$

```
> v2x2 := -1/6*a*F*(a+b-x)*(-a^2+2*x*a-x^2+2*x*b)/EI/(a+b)-a*F*(a+
```

```
b-x)/GS/(a+b) ;
```

$$v2x2 := -\frac{1}{6}\frac{a\,F\,(a+b-x)\,(-a^2+2\,a\,x-x^2+2\,b\,x)}{EI\,(a+b)}-\frac{a\,F\,(a+b-x)}{GS\,(a+b)} \quad \textbf{(100)}$$

```
> simplify(v2x2-v2x) ;
```

$$0 \quad \textbf{(101)}$$

v(C)

```
> vc := simplify(subs(x=a,v1)) ;
```

$$vc := -\frac{1}{3}\frac{b\,F\,a\,(a\,GS\,b+3\,EI)}{EI\,(a+b)\,GS} \quad \textbf{(102)}$$

```
> vc2 := -F*a^2*b^2/3/EI/(a+b)-a*b*F/GS/(a+b) ;
```

$$vc2 := -\frac{1}{3}\frac{F\,a^2\,b^2}{EI\,(a+b)}-\frac{b\,F\,a}{GS\,(a+b)} \quad \textbf{(103)}$$

```
> simplify(vc-vc2) ;
```

$$0 \quad \textbf{(104)}$$

w(A)

```
> simplify(subs(x=0,w1)) ;
```

$$-\frac{1}{6}\frac{a\,F\,b\,(a+2\,b)}{EI\,(a+b)} \quad \textbf{(105)}$$

w(B)

```
> simplify(subs(x=a+b,w2)) ;
```

$$\frac{1}{6}\frac{a\,F\,b\,(2\,a+b)}{EI\,(a+b)} \quad \textbf{(106)}$$

```
>
```