# Notations mathématiques

Jean Fourcade <autogire@volucres.fr>

18 janvier 2016

# 1 Introduction

Cette note précise les notations mathématiques utilisées dans les documents techniques de ce site.

# 2 Vecteur

Les vecteurs sont représentés par un symbole surmonté d'une flèche. Soit par exemple :

$$\vec{P} \tag{1}$$

Le module du vecteur $\vec{P}$ est simplement noté $P$.

# 3 Référentiels

Les référentiels sont utilisés pour décrire les mouvements des corps. Un référentiel est un système de coordonnées muni d'une horloge. Un système de coordonnées est composé d'un point origine et d'une base vectorielle orthonormée directe.

Un référentiel sera noté par la lettre $\mathcal{T}$ indicé d'un symbole le définissant. Soit par exemple le référentiel inertiel noté :

$$\mathcal{T}_1 = (O, \vec{X}_I, \vec{Y}_I, \vec{Z}_I) \tag{2}$$

Le point $O$ définit l'origine du référentiel et les trois vecteurs $\vec{X}_I, \vec{Y}_I, \vec{Z}_I$ sa base vectorielle.

## 3.1 Coordonnées

Les coordonnées d'un vecteur dans un référentiel donné sont représentées par une matrice colonne qui contient les coordonnées de ce vecteur exprimées dans la base de coordonnées associé au référentiel. Le vecteur et la matrice sont indicé du nom du référentiel.

Soit par exemple les coordonnées du vecteur $\vec{P}$ dans le référentiel $\mathcal{T}$. On note :

$$\left.\vec{P}\right]_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}} \tag{3}$$

Pour alléger les notations on pourra également écrire, sans qu'il y ait d'ambiguité :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}} \tag{4}$$

et

$$\left.\vec{P}\right]_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5}$$

### 3.2 Dérivées

La dérivée d'un vecteur $\vec{P}$ par rapport à un référentiel donné est par définition le vecteur dont les coordonnées sont les dérivées des coordonnées de ce vecteur exprimées dans ce référentiel.

Soit par exemple la dérivée du vecteur $\vec{P}$ par rapport au référentiel $\mathcal{T}$, notée :

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{P}\right|_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{\mathcal{T}} \tag{6}$$

La dérivée d'un point par rapport à un référentiel donné définit la vitesse de ce point par rapport à ce référentiel. Soit par exemple la vitesse du point $M$ par rapport au repère $\mathcal{T}$ notée :

$$\vec{U}(M/\mathcal{T}) = \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right|_{\mathcal{T}} \tag{7}$$

De même la dérivée de la vitesse définit l'accélération notée :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{T}) = \left.\frac{d}{dt}\vec{U}(M/\mathcal{T})\right|_{\mathcal{T}} \tag{8}$$

Dans la suite nous ne différencierons plus le référentiel de sa base de coordonnée. Nous utiliserons indifféremment, sans qu'il y ait ambiguïté, le mot repère pour désigner à la fois le référentiel et la base de coordonnées associée.

# 4 Rotations

Une rotation dans l'espace est définie par un angle et un vecteur. Le vecteur détermine le sens de la rotation suivant la règle de la main droite.

Le vecteur vitesse angulaire instantané qui fait passer du système de coordonnées de $\mathcal{T}_1$ au système de coordonnées de $\mathcal{T}_2$ est noté :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{T}_2/\mathcal{T}_1) \tag{9}$$

La direction de ce vecteur définit l'axe de rotation instantané de passage du système de coordonnées de $\mathcal{T}_1$ au système de coordonnées de $\mathcal{T}_2$.

Le théorème de Varignon qui lie la dérivée d'un vecteur par rapport à un premier référentiel à la dérivée de ce même vecteur par rapport à un deuxième référentiel s'écrit :

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{U}\right|_{\mathcal{T}_2} = \left.\frac{d}{dt}\vec{U}\right|_{\mathcal{T}_1} + \Omega(\mathcal{T}_2/\mathcal{T}_1) \wedge \vec{U} \tag{10}$$

Le vecteur acceleration angulaire, dérivée du vecteur rotation angulaire est noté :

$$\vec{\alpha}(\mathcal{T}_2/\mathcal{T}_1) \tag{11}$$

Le théorème de Varignon montre que cette dérivée peut être calculée au choix dans le référentiel $\mathcal{T}_1$ ou $\mathcal{T}_2$. En effet :

$$\vec{\alpha}(\mathcal{T}_2/\mathcal{T}_1) = \frac{d}{dt}\vec{\Omega}(\mathcal{T}_2/\mathcal{T}_1)\Big|_{\mathcal{T}_1} = \frac{d}{dt}\vec{\Omega}(\mathcal{T}_2/\mathcal{T}_1)\Big|_{\mathcal{T}_2} \tag{12}$$

On notera $\vec{\Omega}(\mathcal{F}/\mathcal{T})$ le vecteur vitesse angulaire et $\vec{\alpha}(\mathcal{F}/\mathcal{T})$ le vecteur acceleration angulaire d'un solide par rapport à un repère $\mathcal{T}$ et qui n'est pas autre chose que le vecteur vitesse angulaire et le vecteur acceleration angulaire de n'importe lequel des repères lié au solide par rapport au repère $\mathcal{T}$.

# 5 Changement de coordonnées

Les matrices de passages entre systèmes de coordonnées (matrices de rotations) sont notés par la lettre $M$ indicé du nom du référentiel de destination suivit de celui d'origine. Ainsi la matrice :

$$M_{RI} \tag{13}$$

définit le passage du système de coordonnées de $\mathcal{T}_I$ à celui de $\mathcal{T}_R$. Le changement de coordonnées s'opère par la relation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_R} = M_{RI} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_I} \tag{14}$$

Le changement de coordonné inverse se calcule à partir de la matrice inverse égale à sa transposée :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_I} = M_{RI}^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_R} \tag{15}$$

La matrice de changement de repère d'une rotation d'un angle $\theta$ autour de l'axe $X$ du repère $\mathcal{T}_1$ qui fait passer de ce repère au repère $\mathcal{T}_2$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_1} \tag{16}$$

La matrice de changement de repère d'une rotation d'un angle $\theta$ autour de l'axe $Y$ du repère $\mathcal{T}_1$ qui fait passer de ce repère au repère $\mathcal{T}_2$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_1} \tag{17}$$

La matrice de changement de repère d'une rotation d'un angle $\theta$ autour de l'axe $Z$ du repère $\mathcal{T}_1$ qui fait passer de ce repère au repère $\mathcal{T}_2$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_1} \tag{18}$$

## 6 Torseurs des forces extérieures

Le torseur des forces extérieures calculé au point $S$ appliqué sur un système matériel $\mathcal{F}$ sera noté :

$$\mathfrak{E}(\mathcal{F}, S) = [\vec{F}, \vec{M}(S)] \tag{19}$$

avec $\vec{F}$ la résultante générale des forces extérieures et $\vec{M}(S)$ le moment de cette résultante calculé au point $S$.

Nous avons :

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{F}} d\vec{F}(M) \tag{20}$$

$$\vec{M}(S) = \int_{\mathcal{F}} \overrightarrow{SM} \wedge d\vec{F}(M) \tag{21}$$

## 7 Torseur cinétique

Le torseur cinétique d'un système matériel $\mathcal{F}$ par rapport au repère $\mathcal{T}$ calculé au point $S$ sera noté :

$$\mathfrak{T}(\mathcal{F}/\mathcal{T}) = [\vec{\chi}(\mathcal{F}/\mathcal{T}), \vec{\sigma}(S, \mathcal{F}/\mathcal{T})] \tag{22}$$

avec $\vec{\chi}(\mathcal{F}/\mathcal{T})$ le vecteur quantité de mouvement de $\mathcal{F}$ et $\vec{\sigma}(S, \mathcal{F}/\mathcal{T})$ le moment cinétique de $\mathcal{F}$ calculé au point $S$.

Nous avons :

$$\vec{\chi}(\mathcal{F}/\mathcal{T}) = m(\mathcal{F})\vec{U}(G/\mathcal{T}) \tag{23}$$

$$\vec{\sigma}(S, \mathcal{F}/\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{F}} \overrightarrow{SM} \wedge \vec{U}(M/\mathcal{T})dm \tag{24}$$

avec $m(\mathcal{F})$ la masse du système matériel $\mathcal{F}$ et $G$ son centre de gravité.

## 8 Torseur dynamique

Le torseur dynamique d'un système matériel $\mathcal{F}$ par rapport au repère $\mathcal{T}$ calculé au point $S$ sera noté :

$$\mathfrak{A}(\mathcal{F}/\mathcal{T}) = [\vec{\lambda}(\mathcal{F}/\mathcal{T}), \vec{\delta}(S, \mathcal{F}/\mathcal{T})] \tag{25}$$

avec $\vec{\lambda}(\mathcal{F}/\mathcal{T})$ la résultante générale et $\vec{\delta}(S, \mathcal{F}/\mathcal{T})$ le moment dynamique calculé au point $S$.

Nous avons :

$$\vec{\lambda}(\mathcal{F}/\mathcal{T}) = m(\mathcal{F})\vec{\Gamma}(G/\mathcal{T}) \tag{26}$$

$$\vec{\delta}(S, \mathcal{F}/\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{F}} \overrightarrow{SM} \wedge \vec{\Gamma}(M/\mathcal{T})dm \tag{27}$$

Dans le cas où $S$ est fixe dans $\mathcal{T}$ ($\vec{U}(S/\mathcal{T}) = 0$) ou si $S = G$, nous avons :

$$\vec{\delta}(S, \mathcal{F}/\mathcal{T}) = \left.\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(S, \mathcal{F}/\mathcal{T})\right|_{\mathcal{T}} \tag{28}$$

Les lois de Newton stipulent que le torseur dynamique d'un système matériel $\mathcal{F}$ par rapport à un repère inertiel $\mathcal{T}_I$ calculé en son centre de gravité $G$ est égal au torseur des forces extérieures.

# 9 Cas des solides

Dans le cas où $\mathcal{F}$ est un solide et $S$ un point lié à ce solide, on peut écrire :

$$\vec{\sigma}(S, \mathcal{F}/\mathcal{T}) = I(S, \mathcal{F})\vec{\Omega}(\mathcal{F}/\mathcal{T}) + m(\mathcal{F})\overrightarrow{SG} \wedge \vec{U}(S/\mathcal{T}) \qquad (29)$$

avec $I(S, \mathcal{F})$ le tenseur d'inertie du solide $\mathcal{F}$ calculé au point $S$.
Dans le cas où $S = G$ ou si $S$ est fixe dans $\mathcal{T}$ ($\vec{U}(S/\mathcal{T} = 0)$ alors :

$$\vec{\sigma}(S, \mathcal{F}/\mathcal{T}) = I(S, \mathcal{F})\vec{\Omega}(\mathcal{F}/\mathcal{T}) \qquad (30)$$