

Optimisation des dimensions d'une salle d'écoute

Jean Fourcade <audio@volucres.fr>

15 Juillet 2016

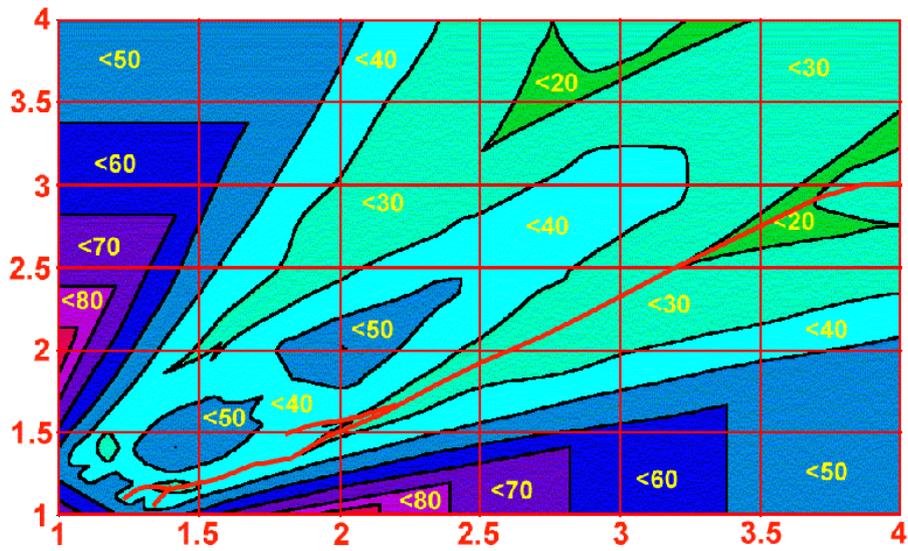


Table des matières

1	Introduction	3
2	Calcul des modes propres	3
3	Résultats	5
3.1	Rapports de Jean-Michel Le Cléac'h	5
3.2	Rapports de Louden	6
3.3	Rapports de Schinichiro Ishii	8
3.4	Etude des coefficients des modes	8
4	Choix d'une salle	11
5	Conclusion	16

1 Introduction

Cette note a pour objet l'étude des meilleurs rapports de dimensions d'une salle d'écoute. Elle se base sur l'article de Louden "Rapports des dimensions de salles rectangulaires avec une bonne distribution de tonalités propres" [1] et un diagramme calculé par Jean-Michel Le Cléac'h (disponible sur le groupe Yahoo Son-qc et représenté en page de garde) dont la courbe en rouge donne les rapports les plus intéressants. Nous examinerons également le rapport optimum donné par Schinichiro Ishii, cité par J. Hiraga dans son article "Des conditions d'écoute en parfaites symbiose avec les JBL Everest" [2].

2 Calcul des modes propres

Les modes propres d'une salle rectangulaire se calculent à partir de la formule de Rayleigh. Celle-ci s'exprime par la relation :

$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{n_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_l}{l}\right)^2} \quad (1)$$

avec c la vitesse du son et h, L, l respectivement la hauteur, la longueur et la largeur de la salle.

Les coefficients entier n_h, n_L, n_l définissent les modes. On distingue les modes axiaux (dans lesquels deux des trois coefficients sont nuls), les modes tangentiels (un des trois coefficients est nul) et les modes obliques (aucun coefficient n'est nul).

Les modes axiaux sont les plus préjudiciables car l'énergie développée est la plus importante. Ils se constituent à partir de deux surfaces parallèles. Vient ensuite les modes tangentiels. Ils nécessitent deux paires de parois parallèles. Leur énergie est la moitié de celle des modes axiaux. Enfin les modes obliques impliquent six surfaces et leur énergie vaut le quart de celle des modes axiaux.

Pour calculer les dimensions optimales d'une salle nous allons calculer ses modes propres et étudier les écarts δf entre deux modes successifs triés selon les fréquences croissantes. Nous déduirons de ces écarts :

- la valeur maximale ;
- l'écart type ;
- le nombre de répétitions.

La formule de Don Davis (voir la référence [5]) définie par :

$$f_c = \frac{3c}{h} \quad (2)$$

dans laquelle h constitue la plus petite dimension de la salle délimite le comportement modal du comportement diffus.

Nous nous intéresserons donc seulement aux modes inférieurs à cette fréquence.

L'examen de l'équation (1) montre que pour un rapport de dimensions constant, les modes sont inversement proportionnels à la racine cubique du volume. On définit alors la variable \mathcal{F} (en hz.m) par :

$$\mathcal{F} = f \sqrt[3]{V} \quad (3)$$

avec V le volume de la salle. On pose $X = L/h$ le rapport longueur sur hauteur et $Y = l/h$ le rapport largeur sur hauteur. On déduit l'expression du volume :

$$V = h^3 XY \quad (4)$$

La formule de Rayleigh devient :

$$\mathcal{F} = \frac{c}{2} \sqrt[3]{XY} \sqrt{n_h^2 + \left(\frac{n_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{n_l}{Y}\right)^2} \quad (5)$$

La limitation des modes à la fréquence f_c s'exprime par :

$$f < \frac{3c}{h} \quad (6)$$

Soit :

$$\mathcal{F} < 3c\sqrt[3]{XY} \quad (7)$$

On déduit :

$$\sqrt{n_h^2 + \left(\frac{n_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{n_l}{Y}\right)^2} < 6 \quad (8)$$

Ainsi, afin de calculer toutes les fréquences respectant la condition (8), nous ferons varier les coefficients n_h, n_L, n_l entre 0 et les valeurs maximum suivantes :

$$n_h^{max} = 6 \quad (9)$$

$$n_L^{max} = 6X \quad (10)$$

$$n_l^{max} = 6Y \quad (11)$$

La littérature [3] donne l'expression qui permet de calculer la densité des modes propres (nombre de modes par bandes de fréquences) autour d'une fréquence f donnée. Celle-ci s'écrit :

$$\frac{\delta N}{\delta f} = \frac{4\pi f^2 V}{c^3} + \frac{\pi f A}{2c^2} + \frac{L}{8c} \quad (12)$$

avec :

$$A = 2(hL + hl + Ll) \quad (13)$$

$$L = 4(h + L + l) \quad (14)$$

On cherche les rapports de salles qui donnent la répartition la plus homogène des modes propres. Louden considère donc qu'une salle idéale est une salle dont la répartition des modes suit celle définie par l'expression (12).

Une indicateur de qualité d'une salle est donc l'écart type de l'expression :

$$\Delta = \delta f - \frac{\delta f}{\delta N} \quad (15)$$

avec δf calculé selon l'équation (1) et $\frac{\delta f}{\delta N}$ selon (12).

L'examen des équations (12) et (5) montre que pour un rapport de salle donné la densité des modes est également inversement proportionnelle à la racine cubique du volume de la salle. En effet nous avons :

$$\frac{\delta N}{\delta \mathcal{F}} = \frac{4\pi}{c^3} \mathcal{F}^2 + \frac{\pi}{c^2} \mathcal{F} \frac{(X + Y + XY)}{XY^{2/3}} + \frac{1}{2c} \frac{(1 + X + Y)}{\sqrt[3]{XY}} \quad (16)$$

Le critère d'optimisation au sens de Louden est donc l'écart type de l'expression :

$$\Delta = \delta \mathcal{F} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta N} \quad (17)$$

avec $\delta \mathcal{F}$ calculé avec l'équation (5) et $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta N}$ avec l'équation (16).

Louden a calculé cet écart type en se limitant aux 36 première fréquences. Nous procéderons comme lui.

Remarquons que le critère calculé selon l'équation (17) diffère en toute rigueur de celui de Louden car ce dernier est calculé pour un volume arbitraire de 201.6 m^3 . La valeur de l'écart type calculé dans cette note est en fait celui de Louden multiplié par $\sqrt[3]{201.6}$ soit 5.86.

3 Résultats

Les calculs ont été réalisés avec le logiciel Scilab. Scilab est un logiciel libre de calcul numérique multiplateforme [6]. Il est disponible pour Window, Mac OS et linux. Le logiciel Scilab peut être téléchargé [<ici>](#). On trouvera à cette [<page>](#), un guide pour débutant.

Scilab exécute des instructions en ligne de commande ou des scripts contenant une liste d'instructions. Les fichiers de scripts portent l'extension *.sce*.

Le script de calcul des modes est *<Balayage modes propres.sce>*. Le script contenant les commandes de tracés est *<Trace.sce>*.

3.1 Rapports de Jean-Michel Le Cléac'h

Intéressons nous dans un premier temps à l'écart maximum des modes. La figure 1 représente un diagramme 3D dont l'axe Z est la valeur maximum de $\delta\mathcal{F}$ en fonction des variables $X = L/h$ et $Y = l/h$ variant de 1 à 3.5.

On remarque l'existence d'une vallée dans laquelle cet écart est minimal et constituant les rapports les plus intéressants.

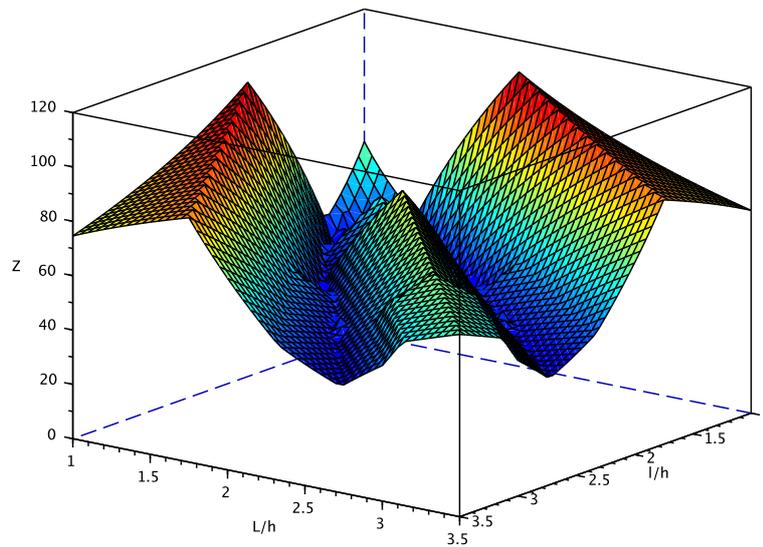


FIGURE 1 – Ecarts maximum de modes (3D)

La valeur maximum de l'écart maximum des modes est de 108.35 hz.m. Cet écart est obtenu pour la salle de rapports $X = 2$ et $Y = 1$. L'écart minimum vaut 33.66 hz.m. Il est obtenu pour la salle de rapports $X = 1.40$ et $Y = 1.15$.

La figure 2 représente l'écart maximum toujours en fonction de X et Y mais dans un diagramme iso-valeurs. La courbe rouge est le lieu de la vallée précédemment décrite et constitue les rapports des salles les plus performantes suivant ce critère. Celle-ci, obtenue par régression linéaire entre $X = 1.7$ et

$X = 3.5$, est calculée dans le script *<Courbe-optimale.sce>*. Cette courbe est donnée par l'équation :

$$a = 0.8053580 \quad (18)$$

$$b = -0.0912281 \quad (19)$$

$$Y = aX + b \quad (20)$$

La figure 2 est semblable à celle de la page de garde calculée par Jean-Michel Le Cléac'h. La différence provient du facteur de normalisation qui est la racine cubique du volume dans le cas de cette note et la hauteur dans le cas du diagramme de Jean-Michel Le Cléac'h.

Les deux étoiles constituent les salles de rapports $X = 1.59$, $Y = 1.26$ et $X = 1.9$, $Y = 1.4$ préconisés respectivement par Bolt [4] et Louden.

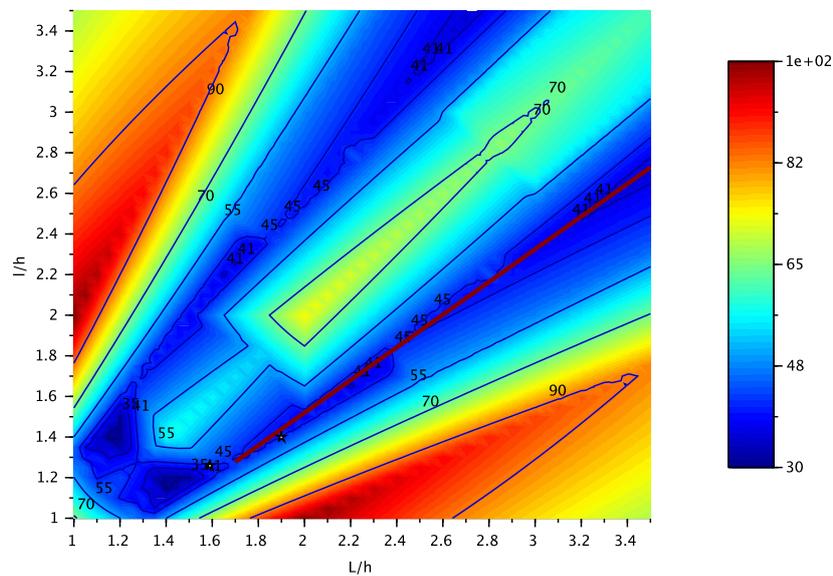


FIGURE 2 – Ecart maximum de modes (iso-valeurs)

La valeur de l'écart maximum pour la salle de Louden vaut 44.79 hz.m.

3.2 Rapports de Louden

Le script de calcul *<Balayage modes propres.sce>* calcule les rapports triés des meilleures salles selon le critère de Louden. En faisant varier Y entre 1.1 et 1.9 et X entre 1.2 et 2.8 avec un pas de 0.1, comme l'a fait Louden, on retrouve son classement.

La salle $X = 1.9$ et $Y = 1.4$ dont l'écart type vaut 6.84 Hz.m est la meilleure. La salle $X = 2.8$ et $Y = 1.4$ dont l'écart type vaut 16.85 hz.m est la plus mauvaise.

Pour tracer un graphique 3D représentant les meilleures salles, il est préférable d'utiliser un pas de 0.05. Il est intéressant de faire remarquer que Louden précise qu'à son époque - 1971 - son calcul à nécessité 48 heures alors qu'il ne prend que 10 secondes sur un PC actuel. Le balayage avec un pas de 0.05 demande quant à lui 5 mn 37 s sur un PC moderne, ce qui au temps de Louden aurait nécessité 67 jours de calcul !

Avec ce nouveau balayage le minimum de l'écart type vaut 5.75 hz.m et le maximum 21.74 hz.m obtenu pour la salle de rapports $X = 2$ et $Y = 1$. On constate qu'il existe six meilleurs rapports que le fameux $X = 1.9$, $Y = 1.4$ qui sont donnés dans le tableau ci-dessous :

X	Y	Δ
1.85	1.40	6.586
2.05	1.40	6.777
2.10	1.45	6.259
2.15	1.45	6.599
1.45	1.20	5.751
3.35	2.45	6.772

La meilleure salle est celle dont les rapports sont : $X = 1.45$ et $Y = 1.20$ qui se trouve assez éloignée de celle donnée par Louden mais très proche de l'optimum calculé à partir du maximum d'écart de modes.

On remarque qu'autour du rapport de Louden, il existe quatre salles à l'écart type proche mais inférieur. On notera également une autre salle de rapports $X = 2.45$ et $Y = 3.35$ mais qui n'a pas été étudiée par Louden.

La figure 3 représente une vue 3D de l'écart type de Louden en fonction des rapports X et Y . Les puits définissent les rapports les plus intéressants.

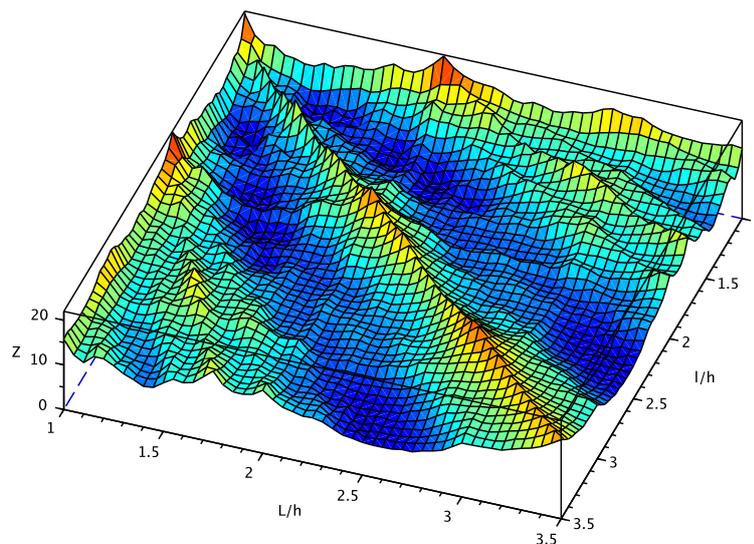


FIGURE 3 – Ecart type de Δ (3D)

La figure 4 représente ce même critère mais dans un diagramme iso-valeurs dans lequel on a tracé la courbe rouge du diagramme 2 et les six meilleures salles.

On remarque que la courbe rouge passe proche des puits ou valeurs minimale de l'écart type de Louden. Ce n'est pas étonnant dans la mesure où l'écart type est fortement sensible à l'écart maximum de modes étant donné le faible nombre de points (36) sur lequel il est calculé.

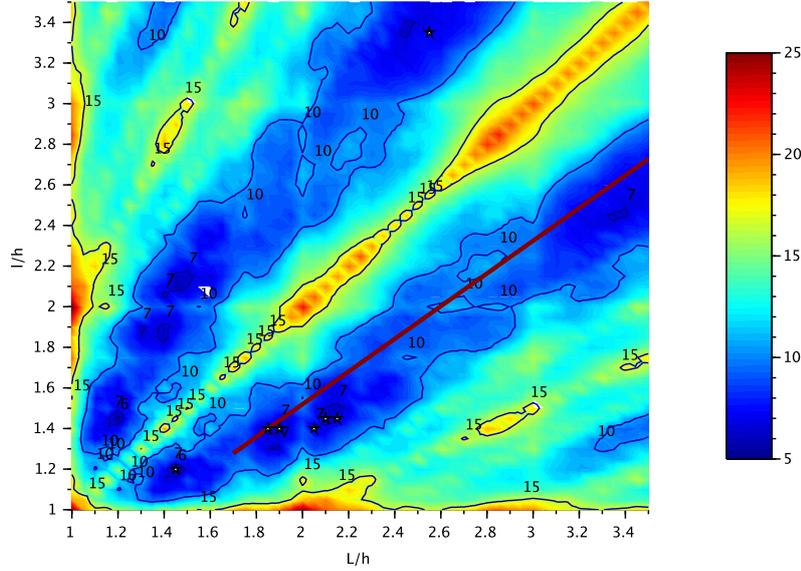


FIGURE 4 – Ecart type de Δ (iso-valeurs)

3.3 Rapports de Schinichiro Ishii

Dans son article [2], Jean Hiraga cite les travaux de l'acousticien Schinichiro Ishii qui préconise les rapports 1 ; 0,845 ; 0,725. La convention adoptée est différente de celle de Louden. Les rapports sont normalisés par la longueur et non la hauteur. En définissant les ratio $X' = l/L$ et $Y' = h/L$, on passe de la convention de Schinichiro Ishii à celle de Louden par les formules :

$$X = \frac{1}{Y'} \quad (21)$$

$$Y = \frac{X'}{Y'} \quad (22)$$

On obtient alors $X = 1.379$ et $Y = 1.166$. Ce rapport conduit à une pièce beaucoup plus cubique que le rapport optimal initial de Louden qui est : $X = 1.9$ et $Y = 1.4$.

Il se rapproche du nouveau rapport optimum de Louden calculé dans ce document $X = 1.45$ et $Y = 1.20$, lui même, je le rappelle, proche de l'optimum calculé à partir du maximum de d'écart de mode qui est $X = 1.40$ et $Y = 1.15$.

3.4 Etude des coefficients des modes

Intéressons nous maintenant aux coefficients des modes qui correspondent à l'écart maximum de la figure 2. L'écart maximum est obtenu à partir de deux jeux de coefficients que nous noterons n_h^1, n_L^1, n_l^1 et n_h^2, n_L^2, n_l^2 . Calculons la variable \mathcal{M} qui vaut :

- 0 quand les coefficients $n_h^1, n_L^1, n_l^1, n_h^2, n_L^2, n_l^2$ sont tous non nuls ;
- 1 quand seulement n_h^1 et n_h^2 sont nuls ;
- 2 quand seulement n_L^1 et n_L^2 sont nuls ;
- 3 quand seulement n_l^1 et n_l^2 sont nuls ;

- 4 quand seulement n_h^1, n_L^1 et n_h^2, n_L^2 sont nuls ;
- 5 quand seulement n_h^1, n_l^1 et n_h^2, n_l^2 sont nuls ;
- 6 quand seulement n_L^1, n_l^1 et n_L^2, n_l^2 sont nuls.

La valeur de \mathcal{M} renseigne la nature des modes qui conduisent à l'écart de fréquence maximum. Cette valeur vaut :

- 0 quand les modes sont obliques ;
- 1,2,3 quand les modes sont tangentiels ;
- 4,5,6 quand les modes sont axiaux.

La figure 5 représentent la variable \mathcal{M} en fonction de X et Y .

On remarque une grande étendue de la figure dans laquelle \mathcal{M} vaut 1 et correspondant au cas où l'écart maximum est obtenu lorsque les coefficients de la hauteur sont nuls.

Dans cette zone une variation de hauteur ne change donc pas la valeur de l'écart maximum de modes. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 4.

La figure 6 représentent \mathcal{M} mais dans un diagramme iso-valeurs avec la courbe des rapports les plus intéressants précédemment calculée. On remarque que cette courbe se situe pour sa plus grande partie dans la zone où la hauteur n'a pas d'influence.

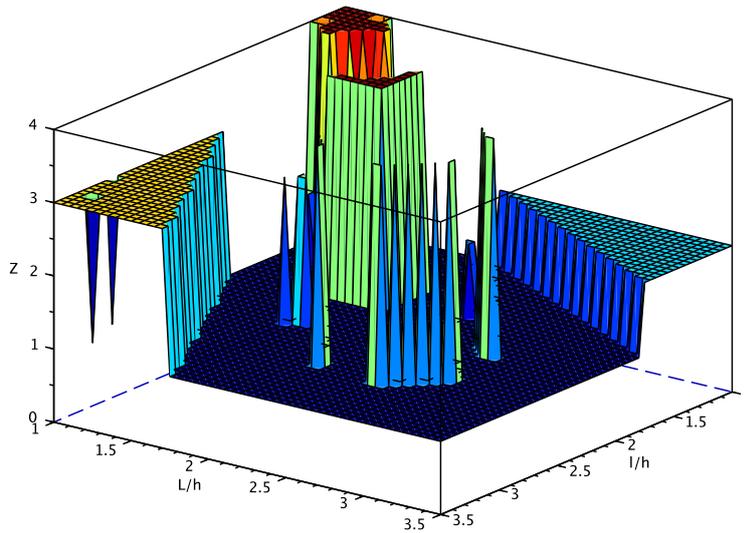


FIGURE 5 – Modes à l'écart maximum (3D)

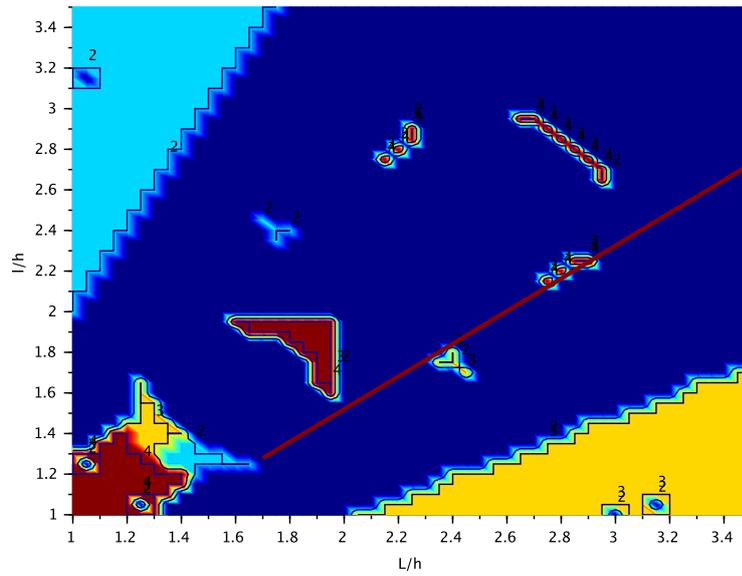


FIGURE 6 – Modes à l'écart maximum (iso-valeurs)

Intéressons nous enfin au nombre de répétitions d'un même mode, c'est à dire aux nombre de valeurs δf nulles. La figure 7 représente ce nombre de répétitions. On remarque, comme on pouvait s'y attendre, un grand nombre de répétitions sur la diagonale ($X = Y$) et également quand les rapports X ou Y s'approchent d'une valeur entière.

Il sera préférable d'éviter des valeurs entières pour X et Y et choisir ces rapports de telle manière que le nombre de répétitions soit nul.

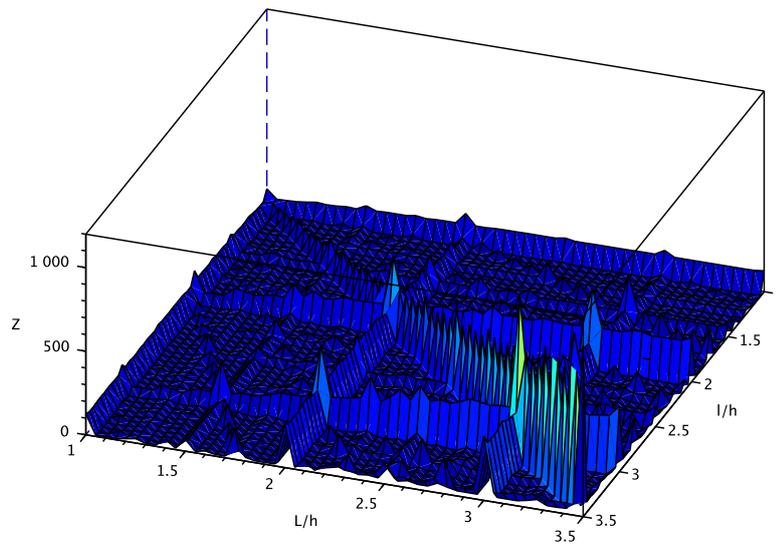


FIGURE 7 – Nombre de répétition de modes

4 Choix d'une salle

Le script `<Modes une salle.sce>` calcule le critère de Louden, l'écart maximum entre deux modes, le nombre de répétitions et trace les écarts de modes ainsi que la courbe définie par l'équation (12).

Prenons l'exemple de la salle de hauteur 4.23 m, de longueur 8.04 m et de largeur 5.92 m. Il s'agit de la salle étudiée par Louden de volume 201.6 m^3 et de rapport $X = 1.9$ et $Y = 1.4$. L'écart maximum de modes est 7.63 hz, l'écart type 1.16 hz. La courbe des écarts de mode est représentée figure 8.

Comparons avec la salle la plus mauvaise, selon Louden, de hauteur 3.72 m de longueur 10.41 m et de largeur 5.20 m. L'écart maximum de modes est 16.51 hz, l'écart type 2.87 hz. La courbe des écarts de modes est représenté figure 9.

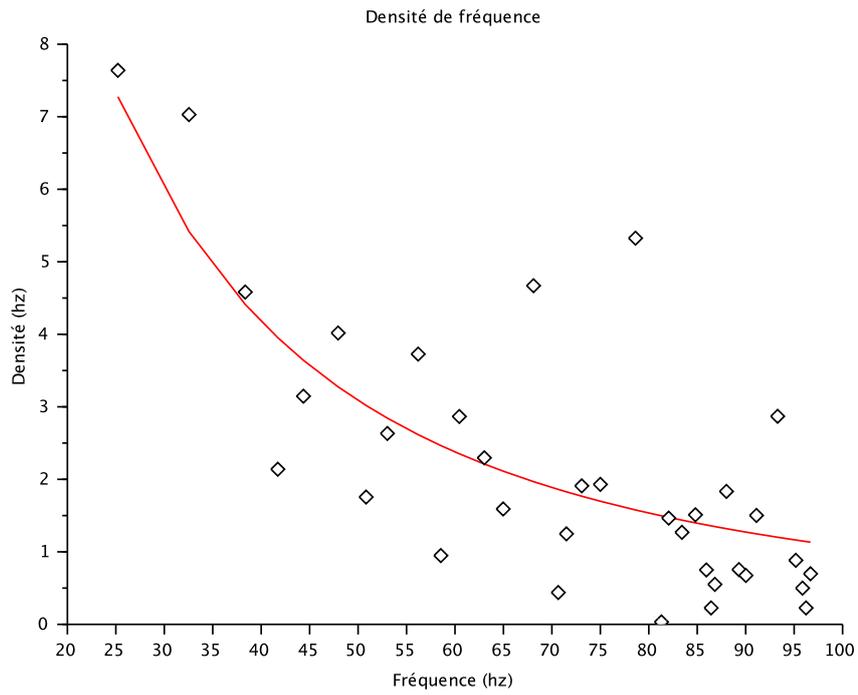


FIGURE 8 – Ecart des modes meilleure salle

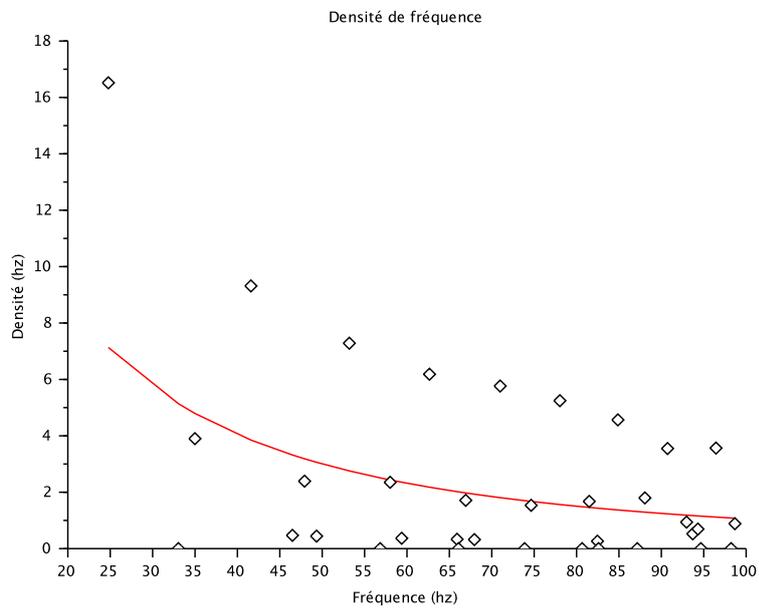


FIGURE 9 – Ecart des modes plus mauvaise salle

La courbe rouge de la figure 2 permet de calculer la salle optimale selon le critère d'écart maximum de fréquence pour une hauteur h et une surface S données. En effet, nous avons :

$$XY = \frac{S}{h^2} \quad (23)$$

D'autre part la courbe optimale est donnée par :

$$Y = aX + b \quad (24)$$

On déduit :

$$X = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a\frac{S}{h^2}}}{2a} \quad (25)$$

Le fichier Excel *<Dimensions optimales.xls>* calcule la longueur et la largeur d'une salle de hauteur et de surfaces données. Prenons à titre d'exemple le rapport optimal de Louden appliqué à une salle de hauteur 4 m. On déduit sa largeur, sa longueur et sa surface qui sont respectivement de 5.6 m, 7.6 m et 42.56 m². L'écart maximum de fréquence de cette salle est 44.79 hz.m. Calculons à présent à l'aide du fichier Excel la salle optimale de même surface et de hauteur 2.6 m. Sa longueur vaut 7.42 m et sa largeur 5.74 m. L'écart maximum de fréquence de cette nouvelle salle est de 44.45 hz.

Etudions maintenant les caractéristiques de ma salle d'écoute. Celle-ci située en sous-sol fait 2.8 m de hauteur, 4.82 m de largeur et 8.85 m de longueur. Cette salle est loin d'être parfaite. L'écart maximum de fréquence est de 80.02 hz.m, l'écart type de 11.81 hz.m conduisant à des écarts réels (dénormalisés) respectivement de 16.25 hz et 2.39 hz. La figure 10 représente les écarts de mode de cette salle. Ce diagramme révèle que l'écart maximum de 16.25 hz est situé à 25 hz et qu'un autre écart important de 12 hz se situe à 45 hz. Au delà, la densité de fréquence n'est pas si mauvaise.

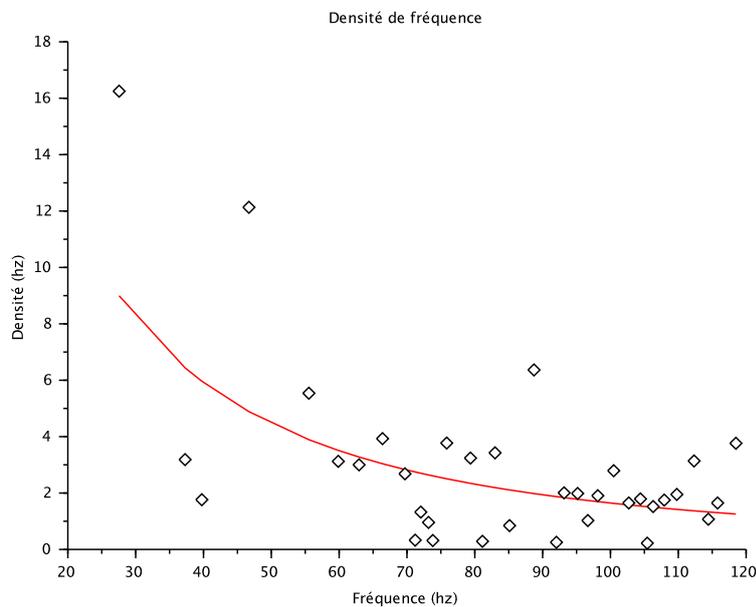


FIGURE 10 – Ecart des modes salle 2.8 m 4.82 m 8.85 m

La figure 11 situe cette salle dans le diagramme des écarts maximum de modes. Afin d'améliorer ses caractéristiques acoustiques, on peut faire varier la longueur (courbe jaune) jusqu'à croiser la courbe rouge optimale.

Le script `<Balayage une salle.sce>` permet de faire varier au choix la hauteur, la largeur ou la longueur d'une salle donnée et de tracer la variation de l'écart maximum de modes et de l'écart type. La figure 12 montre ce que l'on obtient en faisant varier la longueur.

On constate que la longueur optimale est proche de 6.5 m correspondant à minimiser à la fois l'écart maximum de modes et l'écart type. Cette nouvelle salle de longueur 6.5 m à un écart maximum de modes de 9.22 hz et un écart type de 2.04 hz.

Afin de moins raccourcir la salle on peut choisir une longueur de 7 m en se plaçant sur un minimum local de l'écart type. Cette nouvelle salle à un écart maximum de 11.58 hz et un écart type de 2.13 hz.

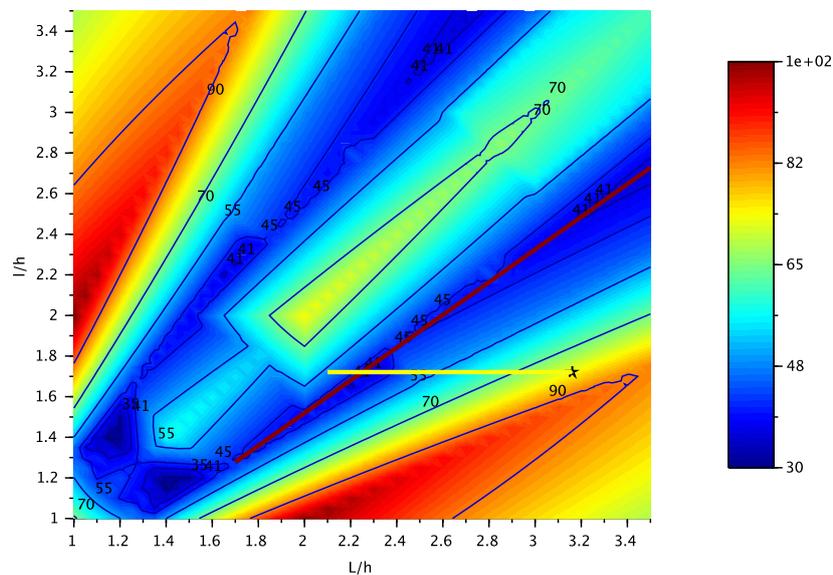


FIGURE 11 – Situation de ma salle dans l'écart maximum des mode

Cette salle étant située en sous-sol on peut se demander si une plus grande hauteur obtenue en creusant plus le sol aurait donné de meilleurs résultats. La figure 13 montre ce que l'on obtient en faisant varier la hauteur.

On constate que l'écart maximum de mode reste constant ce qui rend cette solution peut intéressante. Ce n'est pas étonnant car le lieu de ces salles se situe dans une zone où l'écart maximum est indépendant de la hauteur.

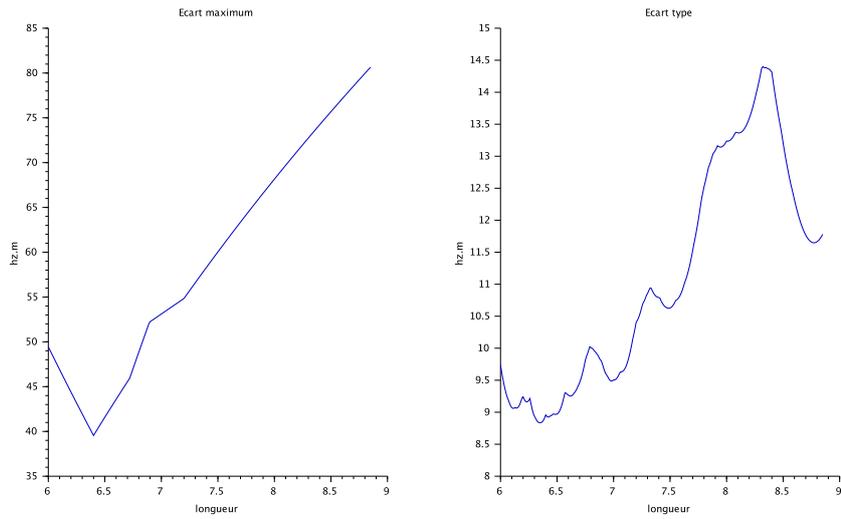


FIGURE 12 – Variation de longueur

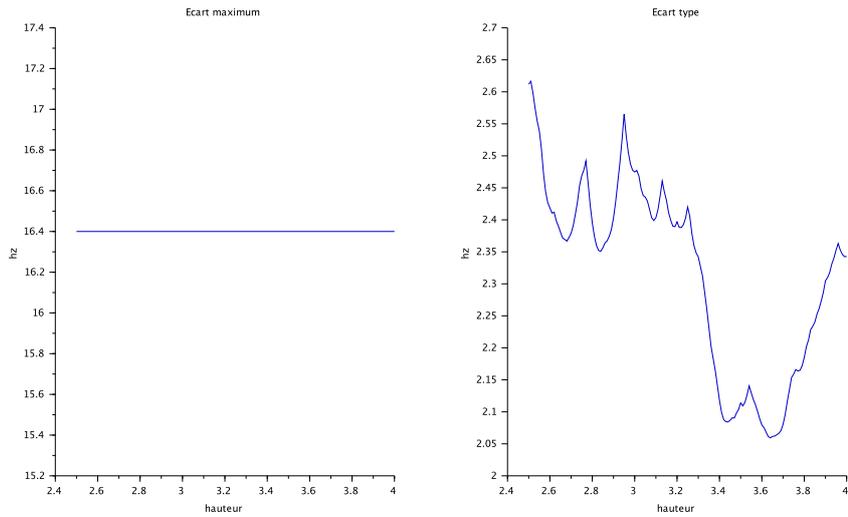


FIGURE 13 – Variation de hauteur

C'est en effet ce qu'on constate en traçant ce lieu (courbe jaune) dans le diagramme de la figure 14 représentant la nature des modes. Cette courbe se situe entièrement dans une zone où sa valeur constante vaut 1 (voir la figure 5) correspondant à des coefficients n_h^1 et n_h^2 nuls.

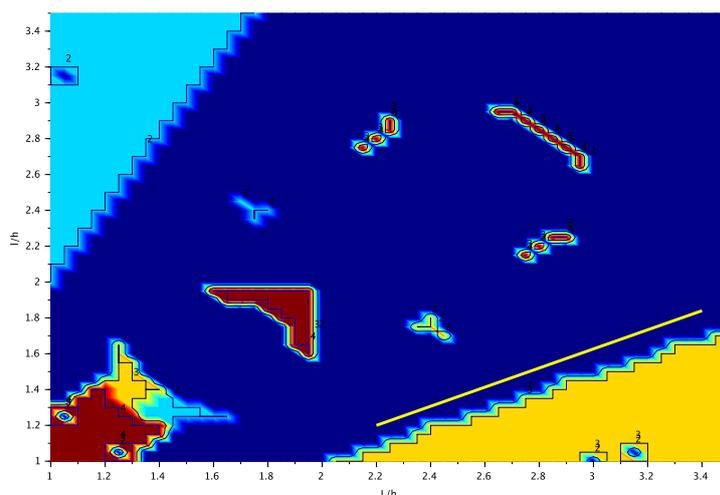


FIGURE 14 – Modes à l'écart maximum pour différentes hauteurs

5 Conclusion

La recherche du minimum de l'écart maximum de deux modes consécutifs définit une vallée dont le lieu correspond aux rapports de salles les plus intéressants. La minimisation de l'écart type des écarts de modes (critère de Louden) définit des puits dont les emplacements sont proches de cette vallée. Ces deux critères conduisent à définir des rapports optimaux.

Evaluons ces critères pour quatre de ces rapports et pour une salle de 5 m de long. Nous obtenons :

- Rapport de Schinichiro Ishii : $X = 1.379$ et $Y = 1.166$
Salle $L = 5$ m, $l = 4.228$ m, $h = 3.626$ m.
Ecart maximum de modes 36.5 hz.m ; 8.59 hz
Ecart type de Louden 7.03 hz.m ; 1.65 hz
- Rapport de Jean-Michel Le Cleac'h : $X = 1.40$ et $Y = 1.15$
Salle $L = 5$ m, $l = 4.107$ m, $h = 3.571$ m.
Ecart maximum de modes 33.6 hz.m ; 8.04 hz
Ecart type de Louden 7.08 hz.m ; 1.69 hz
- Nouveau rapport de Louden : $X = 1.45$ et $Y = 1.20$
Salle $L = 5$ m, $l = 4.138$ m, $h = 3.448$ m.
Ecart maximum de modes 34.5 hz.m ; 8.31 hz
Ecart type de Louden 5.75 hz.m ; 1.38 hz
- Ancien rapport de Louden : $X = 1.9$ et $Y = 1.4$
Salle $L = 5$ m, $l = 3.684$ m, $h = 2.632$ m.
Ecart maximum de modes 44.8 hz.m ; 12.29 hz
Ecart type de Louden 6.82 hz.m ; 1.87 hz

Les trois premiers rapports et plus particulièrement le troisième se révèlent être les meilleurs choix. Ces rapports conduisent tous à une grande hauteur de plafond.

Cependant les critères d'optimisations variant peu dans la vallée précédemment décrite, il existe une grande variété de salles propices à servir d'auditorium.

Références

- [1] M. M. Loudon. Dimension ratios of rectangular rooms with good distribution of eigentones. *Acustica*. 24. 101-104 (1971)
- [2] J. Hiraga : Des conditions d'écoute en parfaites symbiose avec les JBL Everest. *Stéréo Prestige et Image* 92
- [3] P.M. Morse. *Vibration and sound*. McGraw-Hill, New York 1948.
- [4] R.H. Bolt. Note on the normal frequency statistics in rectangular rooms. *J. Acoust. Soc. Am* 18 (1) 130-133 (1946)
- [5] Don Davis. Eugene Patronis. *Sound System Engineering*
- [6] Scilab : logiciel de calcul numérique : <http://www.scilab.org/fr>