Utilitaires Scilab pour le calcul et l'optimisation d'enceintes bass-reflex

Jean Fourcade <audio@volucres.fr>

27 mars 2019

Table des matières

Introduction

Cette note décrit des utilitaires Scilab d'optimisation des enceintes à évent. Scilab est un logiciel libre de calcul numérique multiplateforme [1]. Il est disponible pour Window, Mac OS et linux.

Ces utilitaires utilisent la mesure de la courbe d'impédance et la pression sonore pour optimiser la courbe de réponse de l'enceinte. On réalisera ces mesures avec, par exemple, des logiciels comme ARTA [2] ou REW [3].

Plus précisément, les fonctionnalités qu'offrent ces utilitaires Scilab sont les suivantes :

- simulation de la courbe de réponse, du temps de propagation de groupe, de l'élongation de la membrane et de l'impédance d'un haut-parleur ou d'une enceinte à évent ;
- identification des paramètres de Thiele et Small d'un haut-parleur ;
- identification des paramètres d'une enceinte à évent ;
- calcul de la courbe de réponse à partir de la mesure de la pression sonore à l'intérieure de l'enceinte.

La modélisation mathématique se base sur les travaux de R. H. Small [5], [6]. La modélisation de l'enceinte inclue les pertes par absorption Q_a, par fuites Q_i et par frottement dans l'évent Q_p . L'identification des paramètres fait appel à la méthode des moindres carrés.

Cette note comprend trois parties :

- la première concerne la modélisation théorique du haut-parleur et de l'enceinte à évent ;
- la deuxième partie décrit les utilitaires Scilab ;
- la dernière partie expose un cas concret : l'optimisation de l'enceinte ONKEN 360 litres équipée du haut-parleur ALTEC 416-8A.

Ce document comprend également plusieurs annexes : le développement des équations différentielles qui régissent le mouvement de la membrane du haut-parleur, les résultats du logiciel Maple utilisé pour développer les équations de la partie modélisation et enfin un bref rappel de la méthode d'estimation par moindres carrés.

Notations

La modélisation des haut-parleurs et enceintes acoustiques faisant appel à un nombre importants de paramètres la convention de notation suivante a été adoptée afin d'identifier facilement la signification d'un paramètre :

Le premier indice indique le type de modélisation :

- m : désigne un paramètre mécanique ;
- a : désigne l'équivalent acoustique d'un paramètre électrique ou mécanique ;
- e : désigne un paramètre électrique ou l'équivalent électrique d'un paramètre mécanique.

Le deuxième indice caractérise le composant modélisé :

- s : désigne le haut-parleur (speaker) ;
- b : désigne un paramètre relatif à la boite de l'enceinte (box) ;
- p : désigne un paramètre d'évent (port) ;
- o : désigne un paramètre d'une enceinte à évent (open).

Enfin un astérisque placé en exposant d'un paramètre de masse acoustique indique que ce paramètre prend en compte une ou plusieurs masses de rayonnement.

Chapitre 1

Modélisation théorique

1.1 Le Haut-Parleur

Un haut-parleur électrodynamique se compose :

- d'un diaphragme constitué d'une membrane suspendue d'un coté par la suspension externe et de l'autre coté par le spider ;
- d'une bobine mobile solidaire du diaphragme ;
- d'un circuit magnétique ;
- d'un saladier qui supporte l'ensemble des composants.

Nous nous intéresserons à la modélisation du haut-parleur uniquement dans le domaine des basses fréquences, c'est-à-dire autour de sa fréquence de résonance. On suppose que le diaphragme est infiniment rigide ce qui permet de définir son élongation ξ_d identique en tout point et sa vitesse de déplacement v_d définie par :

$$v_d = \frac{d\xi_d}{dt} \tag{1.1}$$

Un haut-parleur se caractérise par les sept paramètres électriques et mécaniques suivant :

Masse du système mobile (kg) :	M_{ms}
Compliance mécanique de la suspension externe et du spider (m/N) :	C_{ms}
Resistance mécanique de pertes par frottements (N.s/m) :	R_{ms}
Produit du champs magnétique dans l'entrefer par la longueur du fil de la bobine mobile (T.m) :	Bl
Résistance de la bobine mobile (Ω) :	R_e
Surface projetée du diaphragme (m^2) :	S_d

On définit le débit q_d du diaphragme exprimé en m^3/s par :

$$q_d = S_d v_d \tag{1.2}$$

On suppose que le haut-parleur est alimenté par un générateur de tension U_g de résistance interne négligeable.

1.1.1 Schéma equivalent acoustique

L'application du principe fondamental de la dynamique et de la loi d'Ohm généralisée conduit à deux équations différentielles que l'on résoud en utilisant la transformée de Laplace ou de Fourrier (voir annexe A). En éliminant le courant électrique on aboutit au schéma électrique suivant qui modélise le comportement acoustique du haut parleur :

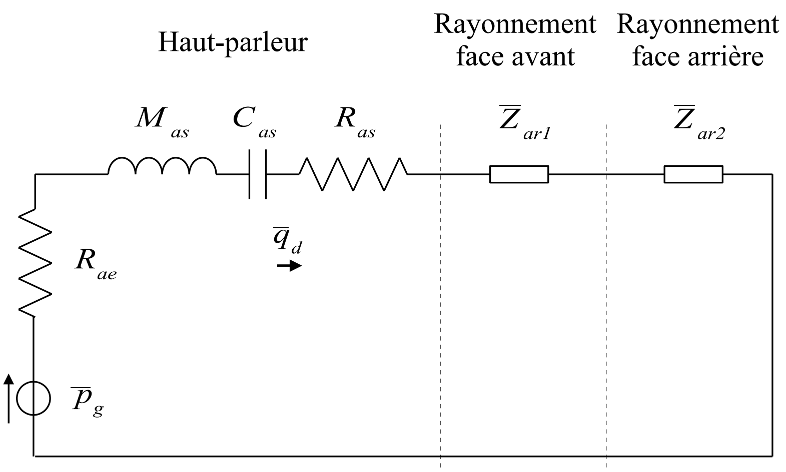

FIGURE 1.1 – Schema acoustique du haut-parleur

Dans ce schéma, $\overline{q}_d$ est la transformée de Laplace ou de Fourrier du débit du diaphragme et constitue le courant électrique de ce circuit. La source de pression $\overline{P}_g$ est la tension de ce circuit et s'exprime par :

$$\overline{P}_g = \frac{Bl}{S_d R_e} \overline{U}_g \tag{1.3}$$

Les composants constituants ce schéma sont les suivants :

Résistance acoustique des pertes dues à la résistance de la bobine (Pa.s/m^3) :	$R_{ae} = \dfrac{(Bl)^2}{S_d^2 R_e}$
Résistance acoustique des pertes par frottement (Pa.s/m^3) :	$R_{as} = \dfrac{R_{ms}}{S_d^2}$
Masse acoustique de l'équipage mobile (kg/m^4) :	$M_{as} = \dfrac{M_{ms}}{S_d^2}$
Compliance acoustique de la suspension (m^3/Pa) :	$C_{as} = S_d^2 C_{ms}$
Impédance de rayonnement de la face avant de la membrance (Pa.s/m^3) :	$\overline{Z}_{ar1}$
Impédance de rayonnement de la face arrière de la membrance (Pa.s/m^3) :	$\overline{Z}_{ar2}$

Le calcul des impédances de rayonnement est relativement complexe et dépend des conditions de montage du haut-parleur (voir M. Rossi [4] paragraphes 2.7.9 et 2.7.11). Dans le cas d'un haut-parleur placé sur un écran infini l'impédance de rayonnement d'une face en considérant la taille du diaphragme petite devant la longueur d'onde (cas des basses fréquences) s'écrit :

$$\overline{Z}_{ar} = \frac{Z_c}{S_d}(\frac{1}{2}(ka)^2 + j\frac{8ka}{3\pi}) \tag{1.4}$$

avec a le rayon de la membrane, $k = \omega/c$ le nombre d'onde et $Z_c = \rho c$ l'impédance caractéristique de l'air où ρ est la densité atmosphérique et c la vitesse du son.

En écrivant l'impédance de rayonnement sous la forme :

$$\overline{Z}_{ar} = R_{ar} + j\omega M_{ar} \tag{1.5}$$

On obtient :

$$R_{ar} = \frac{\rho\omega^2}{2c\pi} \tag{1.6}$$

$$M_{ar} = \frac{8}{3\pi^2}\frac{\rho}{a} \tag{1.7}$$

La résistance acoustique est la résistance dans laquelle le haut-parleur dissipe son énergie acoustique.

La masse acoustique M_{ar} correspond à une masse mécanique :

$$M_r = S_d^2 M_{ar} = \frac{8}{3}\rho a^3 \tag{1.8}$$

Cette masse mécanique est la masse d'air qui s'ajoute à la masse de la membrane et vibre avec elle. La résistance R_{ar} étant faible devante R_{as} elle est négligée dans le calcul de $\overline{q}_d$ (le rendement d'un haut-parleur acoustique est en effet très médiocre). Le seul terme pris en compte dans $\overline{Z}_{ar}$ pour calculer le débit du diaphragme est ainsi M_{ar}.

Dans le cas d'un haut-parleur monté sur un écran infini, il faut doubler cette valeur pour obtenir l'impédance de rayonnement totale. On introduit alors la masse totale définie par :

$$M^*_{ms} = M_{ms} + 2M_r \tag{1.9}$$

et la masse acoustique équivalente définie par :

$$M^*_{as} = M_{as} + 2M_{ar} \tag{1.10}$$

avec $M_{ar} = M_r/S_d^2$.

Dans le cas d'un haut-parleur rayonnant en champ libre sans écran, on trouve une impédance de rayonnement égale à celle d'une seule face du montage sur écran infini.

Le schéma acoustique d'un haut parleur se résume finalement à :

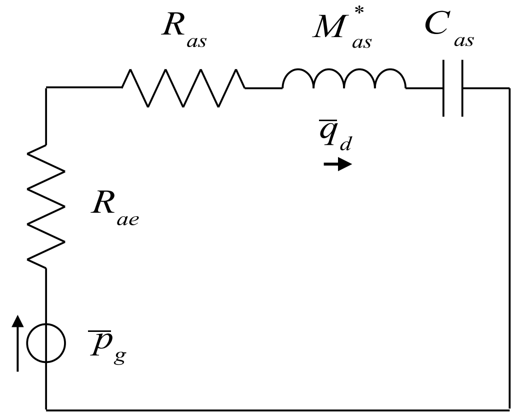

FIGURE 1.2 – Synthése du schema acoustique du haut-parleur

avec M^*_{as} égal à $M_{as} + M_{ar}$ ou $M_{as} + 2M_{ar}$ selon que le haut-parleur est monté ou non sur un écran infini.

1.1.2 Paramètres

En notant s la variable de Laplace, la fonction de transfert du circuit ci-dessus entre le débit du diaphragme $\overline{q}_d$ et la pression $\overline{P}_g$ s'écrit :

$$\overline{q}_d = \frac{\overline{P}_g}{R_{ae} + R_{as} + M^*_{as}s + \dfrac{1}{sC_{as}}} \tag{1.11}$$

Celle-ci se développe sous la forme :

$$\overline{q}_d = \frac{s\overline{P}_g C_{as}}{s^2 M^*_{as} C_{as} + sR_{ae}C_{as} + sR_{as}C_{as} + 1} \tag{1.12}$$

Cette équation fait apparaître le produit $M^*_{as}C_{as}$ qui définit la pulsation de résonance non amortie du haut-parleur et les produits dépendants soit de R_{ae} soit de R_{as} qui définissent les facteurs de qualités correspondants. L'amortissement (lié au facteur de qualité) a donc deux origines : une origine mécanique provenant de R_{ms} et une origine électrique provenant de R_e.

On introduit les valeurs suivantes :

Pulsation de résonance :	$\omega_s = \dfrac{1}{\sqrt{M^*_{as}C_{as}}} = \dfrac{1}{\sqrt{M^*_{ms}C_{ms}}}$
Facteur de qualité mécanique :	$Q_{ms} = \dfrac{1}{\omega_s C_{as} R_{as}} = \dfrac{1}{\omega_s C_{ms} R_{ms}}$
Facteur de qualité électrique :	$Q_{es} = \dfrac{1}{\omega_s C_{as} R_{ae}} = \dfrac{R_e}{\omega_s C_{ms} (Bl)^2}$
Facteur de qualité total :	$\dfrac{1}{Q_{ts}} = \dfrac{1}{Q_{es}} + \dfrac{1}{Q_{ms}}$
Volume d'air équivalent à la suspension (m^3) :	$V_{as} = \rho c^2 C_{as}$

Le paramètre V_{as} est le volume d'air de compliance égale à la suspension mécanique du haut-parleur (voir le paragraphe 1.2.1).

1.1.3 Débit du diaphragme

On définit la variable de Laplace normalisée :

$$S = \frac{s}{\omega_s} \tag{1.13}$$

On obtient alors (voir annexe D lignes 10, 11 et 12) :

$$\overline{q}_d = \overline{q}_s \frac{\overline{G}_s(S)}{S} \tag{1.14}$$

avec :

$$\overline{q}_s = \frac{\overline{U}_g S_d}{Q_{es}(Bl)} \tag{1.15}$$

$\overline{G}_s$ est la fonction de transfert normalisée dont l'expression est :

$$\overline{G}_s(S) = \frac{S^2}{S^2 + Q_{ts}^{-1} S + 1} \tag{1.16}$$

1.1.4 Puissance acoustique rayonnée

La puissance acoustique rayonnée est donnée par :

$$P_{ar} = R_{ar} |\overline{q}_d|^2 \tag{1.17}$$

avec R_{ar} la résistance de rayonnement :

$$R_{ar} = \frac{Z_c}{S_d}\frac{1}{2}(ka)^2 = \frac{\rho}{2c}\frac{\omega^2}{\pi} = \frac{\rho}{2c}\frac{S\omega_s^2}{\pi} \tag{1.18}$$

On obtient (voir annexe D ligne 24) :

$$P_{ar} = P_{as}|\overline{G}_s(S)|^2 \tag{1.19}$$

avec

$$P_{as} = \frac{\rho S_d^2}{2\pi c}(\frac{Bl}{M_{ms}^*})^2\frac{|\overline{U}_g|^2}{R_e^2} \tag{1.20}$$

La forme de la courbe de réponse d'un haut-parleur ne dépend que de Q_{ts}. Elle correspond à un filtre passe-haut du second ordre.

Calculons la fréquence de coupure à -3 db de cette fonction de transfert, soit à calculer ω_3 tel que $|\overline{G}_s(S)|^2 = 1/2$. On obtient :

$$\frac{\omega_3}{\omega_s} = \sqrt{\frac{Q_{ts}^{-2} - 2 + \sqrt{(Q_{ts}^{-2} - 2)^2 + 4}}{2}} \tag{1.21}$$

En annulant la dérivée on trouve la pulsation où se produit le pic de réponse :

$$\frac{\omega_{max}}{\omega_s} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}Q_{ts}^{-2}}} \tag{1.22}$$

Le maximum du pic de réponse est :

$$|\overline{G}_s(\omega_{max}/\omega_s)| = \frac{Q_{ts}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}Q_{ts}^{-2}}} \tag{1.23}$$

Si $Q_{ts} < 1/\sqrt{2}$, il n'y a pas de maximum.

1.1.5 Rendement et niveau acoustique

Le rendement est le quotient entre la puissance acoustique rayonnée et la puissance électrique fournie. Ces deux puissances dépendant de la fréquence, la puissance acoustique rayonnée est calculée dans la partie médiane de la largeur égale donc à P_{as} et la puissance électrique de référence est donnée par :

$$P_{es} = \frac{|\overline{U}_g|^2}{R_e} \tag{1.24}$$

On obtient ainsi la valeur du rendement :

$$\eta_s = \frac{\rho S_d^2}{2\pi c R_e}(\frac{Bl}{M_{ms}^*})^2 \tag{1.25}$$

L'ordre de grandeur de η_s est de quelques pour-cents.

Le rendement fait apparaître le terme $\dfrac{Bl}{M^*_{ms}}$ homogène à une accélération et qu'on nomme facteur d'accélération du haut-parleur.

Calculons le niveau de pression acoustique en dB. Celui-ci s'exprime en fonction de la pression p par :

$$L_p = 20 \log_{10} \frac{p}{p_0} \tag{1.26}$$

avec p_0 la pression de référence égale à $20\mu Pa$. La pression se calcule à partir de l'intensité acoustique I exprimée en W/m^2 selon (voir M. Rossi [4] chapitre 1.5.13) :

$$p = \sqrt{Z_c I} \tag{1.27}$$

avec Z_c l'impédance caractéristique du milieu. Pour un rayonnement omnidirectionnel dans 2π str à la distance r, on a :

$$I = \frac{P_{ar}}{2\pi r^2} \tag{1.28}$$

L'intensité acoustique mesurée à 1 m pour une puissance électrique de référence de 1 W dans la partie médiane de la largeur de bande vaut donc :

$$I = \frac{\eta_s}{2\pi} \tag{1.29}$$

Le niveau de pression acoustique qui en résulte est donc :

$$L_p = 10 \log_{10} (\rho c \frac{\eta_s}{2\pi}) - 20 \log_{10} p_0 \tag{1.30}$$

Soit :

$$L_p = 112.1 + 10 \log_{10} \eta_s \tag{1.31}$$

avec $\rho = 1.18 kg/m^3$ et $c = 344 m/s$.

1.1.6 Elongation du diaphragme

On obtient (voir annexe D ligne 14 et 15) :

$$\overline{\xi}_d = \overline{\xi}_s \frac{\overline{G}_s(S)}{S^2} \tag{1.32}$$

avec

$$\overline{\xi}_s = \frac{\overline{U}_g}{\omega_s Q_{es}(Bl)} \tag{1.33}$$

L'élongation du diaphragme correspond à un filtre passe-bas du second ordre.

La pulsation ω_ξ du maximum de l'élongation s'obtient en dérivant la fonction de transfert. On obtient :

$$\frac{\omega_\xi}{\omega_s} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} Q_{ts}^{-2}} \tag{1.34}$$

Le maximum de la fonction de transfert de l'élongation est alors :

$$x_{max} = \frac{Q_{ts}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}Q_{ts}^{-2}}} \tag{1.35}$$

Si $Q_{ts} < 1/\sqrt{2}$, x_{max} vaut 1 et ω_ξ est nul.

Calculons l'élongation à ω_ξ en fonction de la puissance rayonnée. On obtient (voir annexe D ligne 21) :

$$\xi_d = \sqrt{\frac{2\pi c}{\rho} P_{as}} \frac{x_{max}}{\omega_s^2 S_d} \tag{1.36}$$

L'élongation en fonction de la puissance rayonnée ne dépend que de la fréquence de résonance et de la surface de la membrane du haut-parleur.

Soit ξ_h l'élongation maximum du domaine linéaire de fonctionnement du haut-parleur obtenue en limitant la distorsion à une valeur donnée. Calculons la puissance efficace rayonnée $P_{a\xi}$ correspondant à cette élongation.

En remplaçant P_{as} par $P_{a\xi}$ dans l'équation (1.36) on obtient l'élongation efficace maximum $\hat{\xi_d}$. Or ξ_h est par définition une élongation crête puisqu'elle est le maximum admissible. Nous avons donc :

$$\sqrt{2}\hat{\xi_d} = \xi_h \tag{1.37}$$

On déduit :

$$P_{a\xi} = \frac{\rho\omega_s^4}{4\pi c} \frac{V_d^2}{x_{max}^2} \tag{1.38}$$

avec $V_d = S_d \xi_h$ le volume déplacé par la membrane.

1.1.7 Schéma équivalent électrique

Le schéma électrique équivalent est le suivant (voir annexe A) :

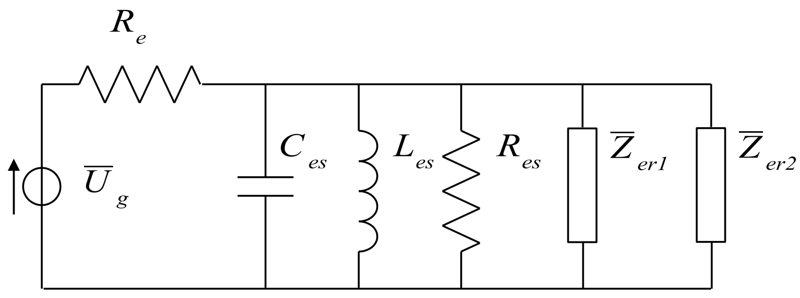

FIGURE 1.3 – Schema électrique du haut-parleur

avec :

Equivalent électrique de R_{ms} (Ω) :	$R_{es} = \dfrac{(Bl)^2}{R_{ms}} = \dfrac{(Bl)^2}{S_d^2 R_{as}}$
Equivalent électrique de M_{ms} (F) :	$C_{es} = \dfrac{M_{ms}}{(Bl)^2} = \dfrac{M_{as} S_d^2}{(Bl)^2}$
Equivalent électrique de C_{ms} (H) :	$L_{es} = C_{ms}(Bl)^2 = \dfrac{C_{as}(Bl)^2}{S_d^2}$
Equivalent électrique du rayonnement (Ω) :	$\overline{Z}_{er} = \dfrac{(Bl)^2}{S_d^2 \overline{Z}_{ar}}$

En prenant les valeurs des impédances de rayonnement calculées précédemment, on se ramène au schéma simplifié suivant :

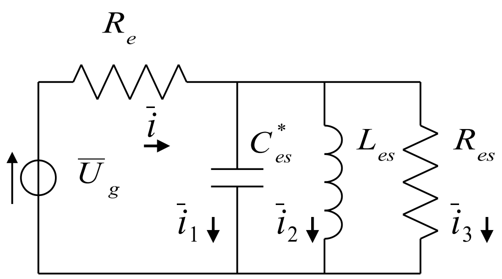

FIGURE 1.4 – Synthèse du schema électrique du haut-parleur

Avec :

$$C^*_{es} = \frac{M^*_{ms}}{(Bl)^2} = M^*_{as} \frac{S_d^2}{(Bl)^2} \tag{1.39}$$

On déduit alors :

Pulsation de résonnance :	$\omega_s = \dfrac{1}{\sqrt{C^*_{es} L_{es}}}$
Facteur de qualité mécanique :	$Q_{ms} = \dfrac{R_{es}}{\omega_s L_{es}}$
Facteur de qualité électrique :	$Q_{es} = \dfrac{R_e}{\omega_s L_{es}}$

L'impédance du haut-parleur se calcule directement à partir du schéma électrique ci-dessus. On définit l'impédance réduite :

$$\overline{Z}_r = \frac{\overline{Z}}{R_e} \tag{1.40}$$

On obtient (voir annexe D ligne 37) :

$$\overline{Z}_r = \frac{S^2 + Q_{ts}^{-1} S + 1}{S^2 + Q_{ms}^{-1} S + 1} \tag{1.41}$$

La courbe d'impédance dépend de $\omega_s, R_e, Q_{es}, Q_{ms}$. La figure 1.5 représente le module de d'impédance du haut-parleur. A la résonance, la phase de l'impédance est nulle et son module vaut :

$$Z_{max} = R_e \frac{Q_{ms}}{Q_{es}} \tag{1.42}$$

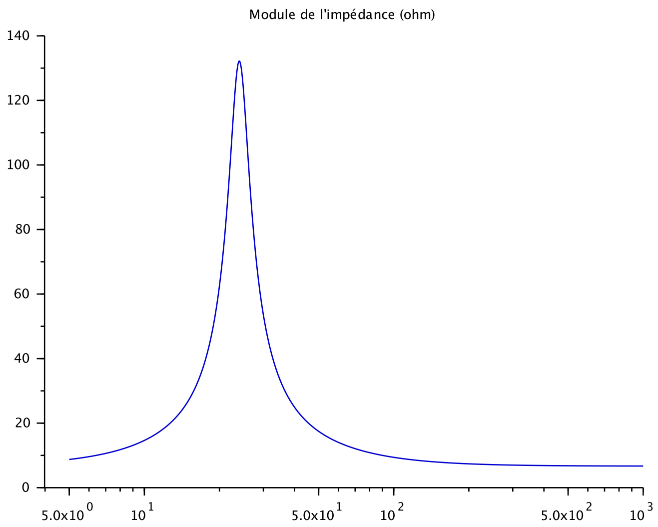

FIGURE 1.5 – Courbe d'impédance du HP

1.1.8 Synthèse

Un haut-parleur est modélisé par six paramètres qui sont :

$$S_d, R_e, Bl, M_{ms}, C_{ms}, R_{ms} \tag{1.43}$$

Le rayonnement de la membrane conduit en prenant en compte la masse d'air qui vibre avec elle à définir le paramètre M^*_{ms}.

L'étude de la réponse en fréquence et de la courbe d'impédance conduit à utiliser un nouveau jeu de paramètres, les paramètres de Thiele et Small, qui sont :

$$S_d, R_e, \omega_s, Q_{es}, Q_{ms}, V_{as} \tag{1.44}$$

De ces paramètres on déduit le facteur de qualité total :

$$\frac{1}{Q_{ts}} = \frac{1}{Q_{es}} + \frac{1}{Q_{ms}} \tag{1.45}$$

Les paramètres mécaniques sé déduisent du nouveau jeu de paramètres par les relations :

$$
\begin{aligned}
C_{ms} &= \frac{V_{as}}{\rho c^2 S_d^2} && (1.46)\\
M_{ms}^{*} &= \frac{1}{\omega_s^2 C_{ms}} && (1.47)\\
R_{ms} &= \frac{\omega_s M_{ms}^{*}}{Q_{ms}} = \frac{1}{\omega_s Q_{ms} C_{ms}} && (1.48)\\
Bl &= \sqrt{\frac{\omega_s M_{ms}^{*} R_e}{Q_{es}}} = \sqrt{\frac{R_e}{\omega_s C_{ms} Q_{es}}} && (1.49)
\end{aligned}
$$

Les paramètres du schéma acoustique se calculent par les formules suivantes :

$$
\begin{aligned}
R_{ae} &= \frac{(Bl)^2}{S_d^2 R_e} && (1.50)\\
R_{as} &= \frac{R_{ms}}{S_d^2} && (1.51)\\
M_{as}^{*} &= \frac{M_{ms}^{*}}{S_d^2} && (1.52)\\
C_{as} &= S_d^2 C_{ms} && (1.53)
\end{aligned}
$$

et ceux du schéma électrique par :

$$
\begin{aligned}
R_{es} &= \frac{(Bl)^2}{R_{ms}} = \frac{(Bl)^2}{S_d^2 R_{as}} && (1.54)\\
C_{es}^{*} &= \frac{M_{ms}^{*}}{(Bl)^2} = M_{as}^{*} \frac{S_d^2}{(Bl)^2} && (1.55)\\
L_{es} &= C_{ms}(Bl)^2 = C_{as} \frac{(Bl)^2}{S_d^2} && (1.56)
\end{aligned}
$$

Enfin le calcul des paramètres du schéma électrique en fonction des paramètres de Thiele et Small s'obtient par :

$$
\begin{aligned}
R_{es} &= R_e \frac{Q_{ms}}{Q_{es}} && (1.57)\\
C_{es}^{*} &= \frac{Q_{es}}{\omega_s R_e} && (1.58)\\
L_{es} &= \frac{R_e}{\omega_s Q_{es}} && (1.59)
\end{aligned}
$$

Le fichier Excel <*Calcul Paramètres ME.xls*> permet de calculer les paramètres mécaniques et électriques à partir des paramètres de Thiele et Small. Le fichier Excel<*Calcul Paramètres TS.xls*> réalise la fonction inverse.

Le schéma de la figure 1.2 montre que les résistance R_{as} et R_{ae} sont en série. L'amortissement du mouvement de la membrane est donc le résultat d'un amortissement mécanique R_{ms} auquel s'ajoute un amortissement électrique Bl^2/R_e.

Le facteur de qualité est lié à l'amortissement par l'équation :

$$Q = \frac{1}{2\xi} \tag{1.60}$$

Sachant que généralement la valeur de Q_{ms} d'un haut-parleur est plus importante que Q_{es}, on déduit que l'amortissement est principalement contrôlé par Q_{es}.

On peut se rendre compte facilement de cette propriété en tapotant légèrement la membrane d'un haut-parleur monté dans une enceinte. L'amortissement est bien plus rapide quand on court-circuite la bobine.

1.1.9 Dimensionnement d'un haut-parleur

Supposons que l'on veuille concevoir un haut-parleur défini par :

- une courbe de réponse donnée ;
- un rendement η_s donné.

La premiere condition fixe directement les paramètres F_s, ω_s et Q_{ts} à partir de la fonction de transfert.

La deuxième détermine pour une valeur R_e et S_d donnés le rapport Bl/M^*_{ms} à partir de l'équation (1.25). Or, l'équation (1.49) permet également de calculer ce rapport. Celle-ci donne :

$$\frac{Bl}{M^*_{ms}} = \sqrt{R_e C_{ms} \omega_s^3} Q_{es} \tag{1.61}$$

En égalant les termes obtenus, on déduit :

$$C_{ms} = \frac{2\pi c Q_{es} \eta_s}{\rho S_d^2 \omega_s^3} \tag{1.62}$$

La valeur de Q_{ms} étant plus élevé que celle de Q_{es} on peut confondre Q_{ts} avec Q_{es} ou se donner une valeur a priori de Q_{ms} et en déduire Q_{es}.

Le reste des paramètres mécaniques se déduit aisément.

Le fichier Excel <*Dimensionnement HP.xls*> permet de calculer les paramètres mécanique d'un haut-parleur à partir de spécifications données.

Prenons le cas d'un haut-parleur spécifié par les valeurs suivantes :

- $Fs = 24$ hz ;
- $Q_{ts} = 0.26$;
- $n_s = 3.38$ %.

On se fixe de plus les paramètres supplémentaires :

- $Re = 6.7\ \Omega$;
- $S_d = 825$ cm^2 ;
- $Q_{ms} = 5$.

On déduit la masse de l'équipage mobile M_{ms}=46.88 gr, le facteur de force Bl=14.9 T.m et le volume d'air équivalent à la compliance de la suspension V_{as}=697.5 l.

Modifions le rendement et recalculons les paramètres mécaniques du haut-parleur. En prenant un rendement plus faible de valeur 1 %, on obtient : M_{ms}=190.32 gr, Bl=27.4 T.m et V_{as}=206.3 l.

Les haut-parleurs à haut rendement se caractérisent par une membrane légère et un V_{as} important. En baissant le rendement, la masse de la membrane augmente le V_{as} diminue et le Bl augmente.

Il est important de remarquer que ces deux haut-parleurs ont exactement la même courbe de réponse. De plus ayant même surface de diaphragme et même fréquence de résonance, leur membrane aura un déplacement identique pour un même niveau acoustique. Du point de vue de leur utilisation, seul le rendement diffère.

Ainsi, en dehors du rendement (et en dehors de problème technologiques de réalisation non abordés ici), la modélisation de Thiele et Small ne permet pas de choisir entre une membrane lourde ou légère.

On peut enfin étudier l'impact sur les paramètres du haut-parleur d'une variation de la valeur de la résistance de la bobine mobile. On constate que le seul paramètre modifié est le produit Bl.

1.1.10 Mesure des paramètres du haut-parleur

Il s'agit d'identifier les paramètres :

$$S_d, R_e, \omega_s, Q_{es}, Q_{ms}, V_{as} \tag{1.63}$$

Les paramètres ω_s, Q_{es}, Q_{ms} dépendent de la manière dont est monté le haut-parleur car, comme nous l'avons vu, la masse de rayonnement diffère selon que le haut-parleur est monté ou non sur un écran. Nous reprendrons ce point dans la dernière partie de cette note.

La note [9] décrit précisément la procédure de mesure et le calcul des paramètres de Thiele et Small d'un haut-parleur avec le logiciel LIMP.

Le paramètre S_d se calcule en mesurant le diamètre effectif de la membrane et R_e se mesure avec un Ohmmètre ou un voltmètre et un pont diviseur.

Les paramètres ω_s, Q_{es} et Q_{ms} se calculent à partir de deux points particuliers de la courbe d'impédance réduite (voir la le manuel d'utilisation de LIMP et les calculs de l'annexe D ligne 45 à 51).

La seule mesure de la courbe d'impédance ne permet pas d'idenfitier le paramètre V_{as}. Pour cela on utilise une deuxième mesure de la courbe d'impédance, le haut-parleur étant monté dans une enceinte de volume connu ou sa membrane alourdie d'une masse donnée.

Nous ne traiterons dans ce document que de la méthode de la masse additionnelle. La masse ajoutée modifie évidemment la fréquence de résonance du haut-parleur mais modifie également sensiblement la compliance et les pertes par frottements de la suspension. La connaissance de seulement la nouvelle fréquence de résonance $\omega_{s\delta}$ ne suffit donc pas pour calculer M_{ms} et C_{ms}. Il faut également calculer la nouvelle compliance à partir du nouveau facteur électrique.

On note $M^*_{ms\delta}$ la nouvelle masse de l'équipage mobile, $C_{ms\delta}$ la nouvelle compliance et $Q_{es\delta}$ le nouveau facteur électrique. Nous avons :

$$\delta m = M^*_{ms\delta} - M^*_{ms} \tag{1.64}$$

D'autre part nous avons :

$$M^*_{ms\delta}\omega^2_{s\delta}C_{ms\delta} = 1 = M^*_{ms}\omega^2_s C_{ms} \tag{1.65}$$

En faisant apparaître les facteurs de qualités électriques, nous obtenons l'équation qui permet de calculer la masse de l'équipage mobile :

$$\delta m = M^*_{ms}(\frac{\omega_s Q_{es\delta}}{\omega_{s\delta} Q_{es}} - 1) \tag{1.66}$$

On déduit :

$$C_{ms} = \frac{1}{M^*_{ms}\omega_s^2} \tag{1.67}$$

$$V_{as} = \rho c^2 S_d^2 C_{ms} \tag{1.68}$$

La méthode de calcul du V_{as} avec une masse additionnelle ne permet pas d'estimer précisément ce paramètre. Des erreurs de l'ordre de 10% sont fréquentes. Une solution pour améliorer la précision d'estimation est d'utiliser plusieurs masses additionnelles et d'effectuer une régresssion linéaire sur les valeurs obtenues.

Dans la deuxième partie de cette note nous verrons comment calculer les paramètres du haut-parleur à partir de la méthode des moindres carrés qui permet d'ajuster les paramètres sur l'ensemble des points de mesures.

Cette méthode permet également d'identifier la résistance de la bobine mobile sans avoir à la mesurer avec un ohmmètre (voir l. Mateljan, M. Sikora [8] pour un comparatif des méthodes d'estimations).

1.2 L'enceinte close

Une enceinte close est une boite fermée sur une face de laquelle est monté un haut-parleur électrodynamique dont un des cotés de la membrane rayonne à l'air libre.

1.2.1 Schéma équivalent acoustique

Pour calculer le schéma équivalent acoustique d'une enceinte close il faut déterminer les paramètres acoustique d'une boite fermée doté d'un piston oscillant (le haut-parleur). Notons V_b le volume d'une telle boite.

Le mouvement du piston provoque une variation de volume auquel il résulte une variation de pression. La variation de pression exerçant une force sur la surface du piston, la boite se comporte comme un ressort pneumatique dont on peut définir la compliance acoustique. On montre que la valeur de cette compliance vaut (voir [4] paragraphes 5.3.10 et 5.3.16) :

$$C_{ab} = \beta \frac{V_b}{\rho c^2} \tag{1.69}$$

Le facteur β valant 1 pour une transformation purement adiabatique et 1.4 pour une transformation purement isotherme (cas d'un matériaux fibreux disposé à l'intérieur de la boite).

Cette compliance présente également une résistance acoustique R_{ab} due aux pertes viscothermiques qui dépendent de la nature plus ou moins absorbante des parois où du matériaux de remplissage (voir [1] paragraphe 5.3.26).

Enfin, cette compliance présente également une masse acoustique M_{ab} qui lorsque la surface du piston est petite par rapport aux dimensions de l'enceinte vaut celle d'un piston rayonnant sur un écran infini (voir [1] paragraphe 5.3.14).

La boite d'une enceinte close se caractérise donc par trois composants acoustiques C_{ab}, R_{ab}, M_{ab} dont on ne connaît pas précisément les valeurs.

Le schéma acoustique équivalent d'une enceinte close (voir figure 1.6) s'obtient à partir de celui du haut-parleur sur un écran infini en substituant l'impédance de rayonnement arrière par les éléments constitutif de la boite.

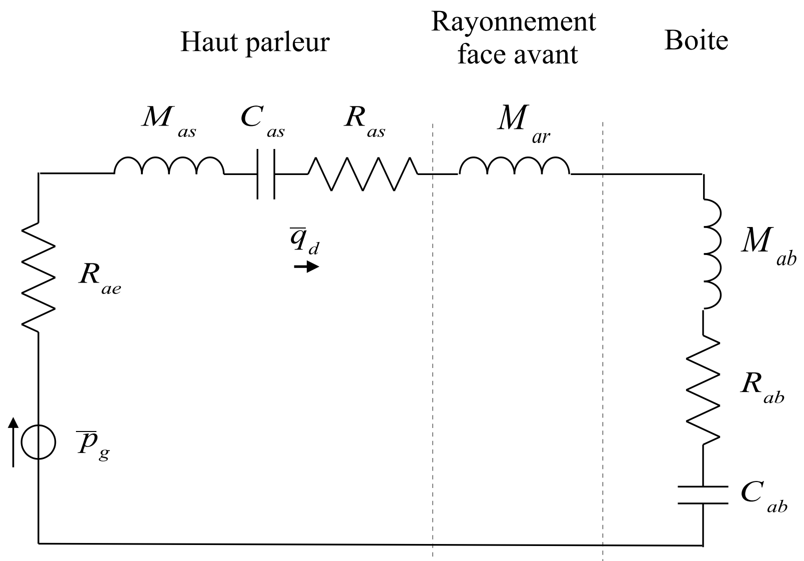

FIGURE 1.6 – Schema acoustique de l'enceinte close

On pose :

$$M^*_{ac} = M_{as} + M_{ab} + M_{ar} \tag{1.70}$$

$$\frac{1}{C_{ac}} = \frac{1}{C_{as}} + \frac{1}{C_{ab}} \tag{1.71}$$

$$R_{ac} = R_{as} + R_{ab} \tag{1.72}$$

On obtient alors le schéma simplifié de la figure 1.7.

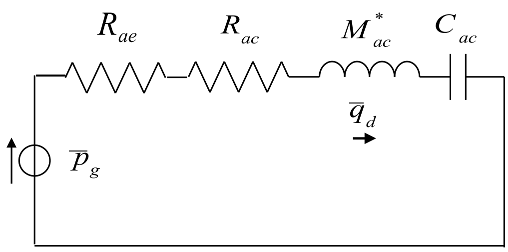

FIGURE 1.7 – Synthése du schema acoustique de l'enceinte close

On définit les paramètres suivants :

Facteur d'augmentation de compliance :	$\beta = \dfrac{\rho c^2 C_{ab}}{V_b}$
Facteur de masse acoustique :	$q = \dfrac{M^*_{as}}{M^*_{ac}}$
Facteur de perte acoustique :	$p = \dfrac{R_{as}}{R_{ac}}$

Le coefficient β caractérise le matériaux acoustique de remplissage. Le coefficient q caractérise la variation de la masse acoustique de rayonnement entre le haut-parleur mesuré en dehors de l'enceinte (M^*_{as}) et monté dans celle-ci (M^*_{ac}). Le coefficient p caractérise la variation des pertes acoustiques.

Les coefficients β, q, p seront déterminés par mesures de la courbe d'impédance.

1.2.2 Paramètres

On définit les paramètres suivants :

Facteur de compliance :	$\alpha = \dfrac{C_{as}}{C_{ab}} = \dfrac{V_{as}}{\beta V_b}$
Pulsation de résonance du haut-parleur dans l'enceinte :	$\omega_{sc} = \dfrac{1}{\sqrt{M^*_{ac} C_{as}}}$
Pulsation de résonance de l'enceinte :	$\omega_c = \dfrac{1}{\sqrt{M^*_{ac} C_{ac}}}$
Facteur de qualité mécanique :	$Q_{mc} = \dfrac{1}{\omega_c C_{ac} R_{ac}}$
Facteur de qualité électrique :	$Q_{ec} = \dfrac{1}{\omega_c C_{ac} R_{ae}}$
Facteur de qualité total :	$\dfrac{1}{Q_{tc}} = \dfrac{1}{Q_{ec}} + \dfrac{1}{Q_{mc}}$

La pulsation de résonance du haut-parleur ω_{sc} ne prend en compte que la compliance C_{as} du haut-parleur. Elle diffère de la pulsation de résonance ω_s du fait de la différence des impédances de rayonnement $(M^*_{ac} \neq M^*_{as})$. Le rapport de ces pulsation vaut :

$$\frac{\omega_{sc}}{\omega_s} = \sqrt{\frac{M^*_{as}}{M^*_{ac}} \frac{C_{as}}{C_{as}}} = q \tag{1.73}$$

Le rapport de la pulsation de résonance de l'enceinte par rapport à celle du haut-parleur mesuré en dehors de l'enceinte vaut :

$$\frac{\omega_c}{\omega_s} = \sqrt{\frac{M^*_{as}}{M^*_{ac}} \frac{C_{as}}{C_{ac}}} = \sqrt{q(1+\alpha)} \tag{1.74}$$

Le rapport des facteur de qualité mécanique est :

$$\frac{Q_{mc}}{Q_{ms}} = \frac{\omega_s C_{as} R_{as}}{\omega_c C_{ac} R_{ac}} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{q}} p \tag{1.75}$$

Le rapport des facteurs de qualité électrique est :

$$\frac{Q_{ec}}{Q_{es}} = \frac{\omega_s C_{as} R_{ae}}{\omega_c C_{ac} R_{ae}} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{q}} \tag{1.76}$$

Le schéma acoustique d'une enceinte close étant identique à celui du haut-parleur seul, le débit du diaphragme, la courbe de réponse se déduisent directement de celle du haut-parleur.

1.2.3 Schéma équivalent électrique

Le schéma électrique se déduit du schéma acoustique. On obtient :

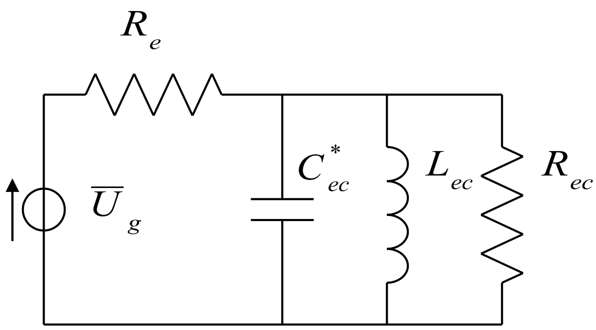

FIGURE 1.8 – Schema électrique de l'enceinte close

Les éléments C^*_{ec}, L_{ec}, R_{ec} sont les équivalents électriques de respectivement M^*_{ac}, C_{ac}, R_{ac} selon les relations du paragraphe 1.1.7.

Le schéma électrique est identique, aux valeurs des composants prés, à celui du haut-parleur.

1.2.4 Synthèse avec un haut-parleur donné

La démarche de calcul des caractéristiques d'une enceinte close à partir d'un haut-parleur donné est synthétisé dans le schéma de la figure 1.9. Connaissant d'une part les paramètres du haut-parleur :

$$S_d, R_e, \omega_s, Q_{es}, Q_{ms}, V_{as} \tag{1.77}$$

Connaissant d'autre part le volume de l'enceinte V_b et une estimation des paramètres β, p, q, on calcule les paramètres de l'enceinte close dont on déduit la courbe de réponse.

La valeur du paramètre q varie selon que les paramètres de Thiele et Small du haut-parleur aient été mesurés sur écran ou non. Si la mesure du haut-parleur a été réalisée sur un écran infini on peut faire l'hypothèse que les masses de rayonnement M^*_{ac} et M^*_{as} sont identiques et prendre $q = 1$.

Dans le cas d'une mesure en champ libre sans écran, on supposera :

$$M_{ac}^* = M_{as}^* + M_{ar} \tag{1.78}$$

avec M_{as}^* la masse totale issue de la mesure du haut-parleur en champ libre et $M_{ar} = \dfrac{8\rho}{3\pi}a^2$ la masse de rayonnement d'une face. On prendra donc :

$$q = \frac{M_{ac}^*}{M_{as}^* + M_{ar}} \tag{1.79}$$

Le coefficient β est pris entre 1,2 et 1,4 en fonction du remplissage de l'enceinte. On supposera que les pertes dues à la boîte sont inférieures aux pertes mécaniques du haut-parleur, soit $R_{ab} \ll R_{as}$. On déduit $p = 1$.

L'enceinte réalisée, la mesure de la courbe d'impédance permetra d'identifier les paramètres ω_c, Q_{ec}, Q_{mc} à partir desquels on calculera les paramètres selon les formules (voir annexe **??** ligne 4) :

$$\alpha = \frac{\omega_c Q_{ec}}{\omega_s Q_{es}} - 1\ ,\ \beta = \frac{V_{as}}{\alpha V_b}\ ,\ q = \frac{\omega_c Q_{es}}{\omega_s Q_{ec}}\ ,\ p = \frac{Q_{mc} Q_{es}}{Q_{ms} Q_{ec}}$$

On pourra alors simuler la courbe de réponse et remplir plus ou moins le volume de l'enceinte d'abosorbant et/ou diminuer son volume afin d'obtenir la courbe de réponse visée.

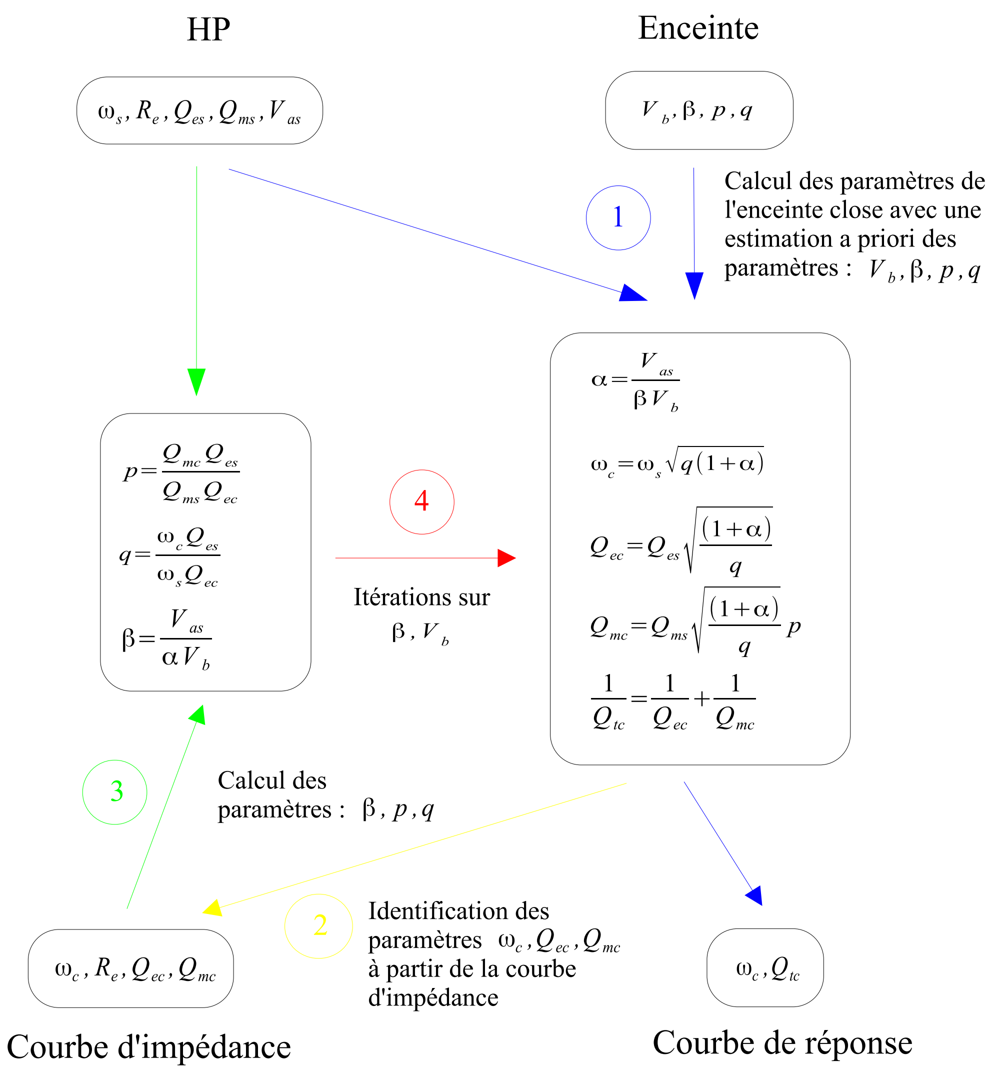

FIGURE 1.9 – Synthése conception enceinte close

1.3 L'enceinte à évent

Une enceinte à évent est une boite ouverte sur une des faces de laquelle est monté un haut-parleur électrodynamique.

1.3.1 Schéma équivalent acoustique

Comme, l'enceinte close, la boite se caractérise donc par trois composants acoustiques C_{ab}, R_{ab}, M_{ab} dont on ne connaît pas précisément les valeurs.

A ces paramètres s'ajoutent ceux caractérisants l'évent qui sont : une masse acoustique M_{ap} , une masse acoustique de rayonnement M_{arp} et une resistance acoustique R_{ap}.

On tient compte également des pertes par fuites de la boite modélisées par une résistance R_{al}.

Des considérations ci-dessus, on déduit le schéma acoustique :

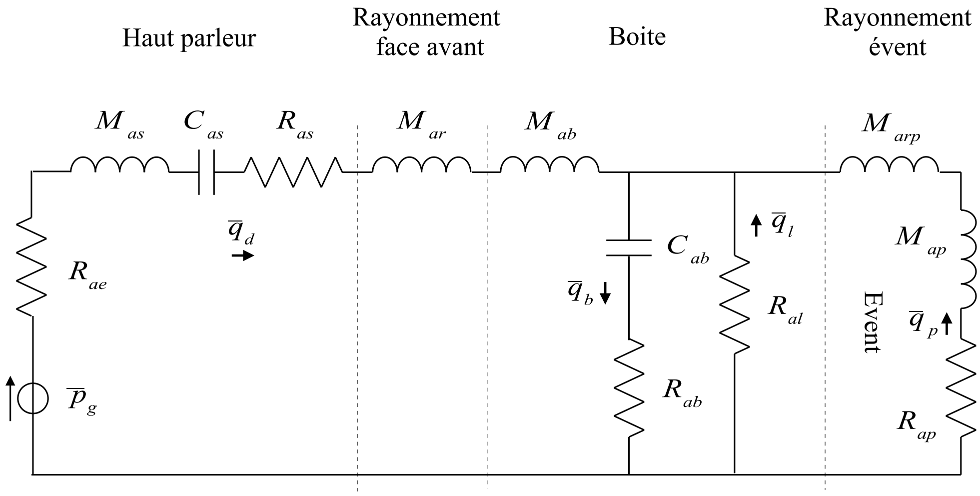

FIGURE 1.10 – Schema acoustique de l'enceinte à event

On pose :

$$M_{ao}^{*}{=}M_{as} + M_{ar} + M_{ab} \tag{1.80}$$
$$M_{ap}^{*}{=}M_{ap} + M_{arp} \tag{1.81}$$

On obtient alors le schéma simplifié de la figure 1.11. On définit les paramètres suivants :

Facteur d'augmentation de compliance :	$\beta = \dfrac{\rho c^2 C_{ab}}{V_b}$
Facteur de masse acoustique :	$q = \dfrac{M_{as}^{*}}{M_{ao}^{*}}$

Le coefficient β caractérise le matériaux acoustique de remplissage et le coefficient q caractérise la variation de la masse acoustique de rayonnement entre le haut-parleur mesuré en dehors de l'enceinte et monté dans celle-ci.

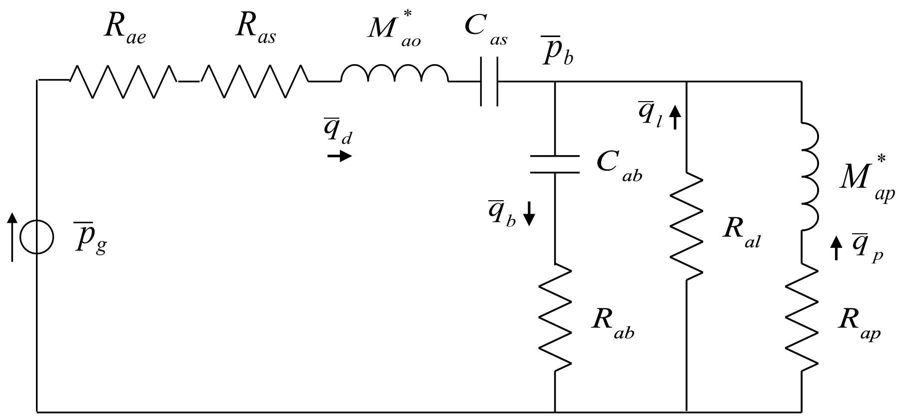

FIGURE 1.11 – Synthèse du schéma acoustique de l'enceinte à event

1.3.2 Paramètres

On définit les paramètres suivants :

Facteur de compliance :	$\alpha = \dfrac{C_{as}}{C_{ab}} = \dfrac{V_{as}}{\beta V_b}$
Pulsation de résonance du haut-parleur dans l'enceinte :	$\omega_{so} = \dfrac{1}{\sqrt{M^*_{ao} C_{as}}}$
Pulsation de résonance de l'évent :	$\omega_p = \dfrac{1}{\sqrt{M^*_{ap} C_{ab}}}$
Rapport de résonance entre l'évent et le haut-parleur :	$h = \dfrac{\omega_p}{\omega_{so}}$
Facteur de qualité mécanique :	$Q_{mo} = \dfrac{1}{\omega_{so} C_{as} R_{as}}$
Facteur de qualité électrique :	$Q_{eo} = \dfrac{1}{\omega_{so} C_{as} R_{ae}}$
Facteur de qualité total :	$\dfrac{1}{Q_{to}} = \dfrac{1}{Q_{eo}} + \dfrac{1}{Q_{mo}}$
Facteur de qualité des pertes par fuites :	$Q_l = \omega_p C_{ab} R_{al}$
Facteur de qualité des pertes par absorption dans la boite :	$Q_a = \dfrac{1}{\omega_p C_{ab} R_{ab}}$
Facteur de qualité due au frottement dans l'évent :	$Q_p = \dfrac{1}{\omega_p C_{ab} R_{ap}}$

De ces paramètres on déduit :

$$\frac{\omega_{so}}{\omega_s} = \sqrt{\frac{M^*_{as}}{M^*_{ao}}} = \sqrt{q} \ , \ \frac{Q_{eo}}{Q_{es}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \ , \ \frac{Q_{mo}}{Q_{ms}} = \frac{1}{\sqrt{q}}$$

1.3.3 Débit dans l'enceinte

Il s'agit de calculer q_b. On pose, comme pour le haut-parleur :

$$S = \frac{s}{\omega_{so}} \tag{1.82}$$

avec s la variable de Laplace. A partir du schéma acoustique on déduit (voir annexe E ligne 23 et 24 à 42) :

$$\overline{q}_d = \overline{q}_o \frac{\overline{G}_o(S)}{S} \tag{1.83}$$

Avec :

$$\overline{q}_o = \frac{\overline{U}_g S_d}{Q_{eo} Bl(1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1})} \tag{1.84}$$

$\overline{G}_o(S)$ est donné par :

$$\overline{G}_o(S) = \frac{a_4 S^4 + b_3 S^3}{a_4 S^4 + a_3 S^3 + a_2 S^2 + a_1 S + a_0} \tag{1.85}$$

Avec :

$$a_0 = h^3(1 + Q_p^{-1} Q_l^{-1}) \tag{1.86}$$
$$a_1 = h^3 Q_{to}^{-1}(1 + Q_p^{-1} Q_l^{-1}) + h^2(Q_p^{-1} + Q_a^{-1} + Q_l^{-1} + Q_p^{-1} Q_a^{-1} Q_l^{-1} + \alpha Q_p^{-1}) \tag{1.87}$$
$$a_2 = h^3(1 + Q_p^{-1} Q_l^{-1}) + h^2 Q_{to}^{-1}(Q_p^{-1} + Q_a^{-1} + Q_l^{-1} + Q_p^{-1} Q_a^{-1} Q_l^{-1}) + h(\alpha(1 + Q_p^{-1} Q_a^{-1}) + 1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}) \tag{1.88}$$
$$a_3 = h^2(Q_p^{-1} + Q_a^{-1} + Q_l^{-1} + Q_p^{-1} Q_a^{-1} Q_l^{-1}) + h Q_{to}^{-1}(1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}) + \alpha Q_a^{-1} \tag{1.89}$$
$$a_4 = h(1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}) \tag{1.90}$$
$$b_3 = h^2 Q_p^{-1}(1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}) \tag{1.91}$$

1.3.4 Puissance acoustique rayonnée

La puissance acoustique rayonnée se calcule en considérant l'ensemble des débits sortants, c'est à dire à partir de $q_d + q_l + q_p$ (voir la figure 1.11). Or nous avons :

$$\overline{q}_b = \overline{q}_d + \overline{q}_l + \overline{q}_p \tag{1.92}$$

La puissance rayonnée se calcule donc à partir de l'équation $P_{ar} = R_{ar}|\overline{q}_b|^2$ avec R_{ar} la résistance de rayonnement.

On obtient (voir annexe E ligne 60) :

$$P_{ar} = P_{ao}|\overline{G}_o(S)|^2 \tag{1.93}$$

avec

$$P_{ao} = \frac{q^2}{(1+Q_a^{-1}Q_l^{-1})^2}\frac{\rho S_d^2}{2\pi c}(\frac{Bl}{M_{ms}^*})^2\frac{|\overline{U}_g|^2}{R_e^2} \tag{1.94}$$

La figure 1.12 montre l'effet des paramètres Q_l, Q_a, Q_p sur la courbe de réponse.

La courbe bleue est la réponse sans perte d'une enceinte à évent alignée sur un Butterworth. On remarque les effets différents de Q_l, Q_a, Q_p qui conduisent tous à baisser la fréquence de coupure. On cherchera donc toujours à minimiser les pertes lors de la conception d'un bass-reflex.

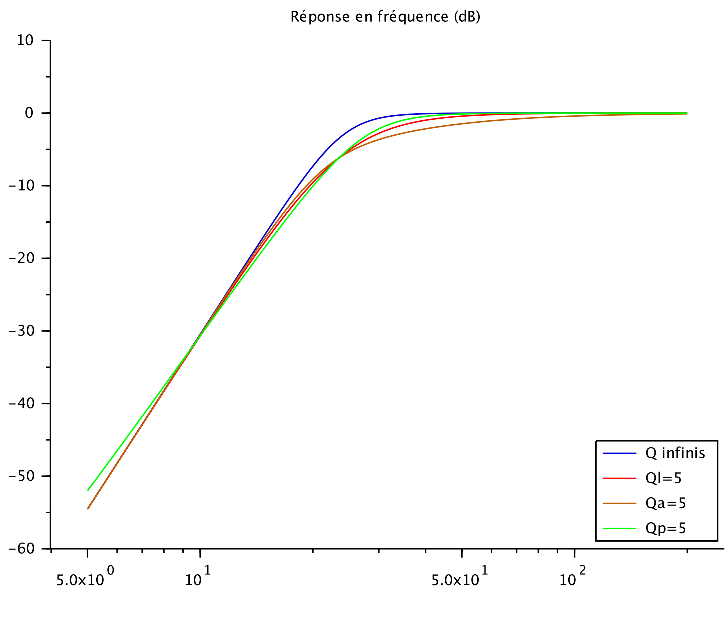

FIGURE 1.12 – Effet des pertes sur la courbe de réponse

1.3.5 Elongation du diaphragme

L'élongation du diaphragme se calcule à partir de q_d. On obtient (voir annexe E ligne 49 et 50) :

$$\overline{\xi}_d = \overline{\xi}_o \frac{a_2 S^2 + a_1 S + a_0}{S^4 + b_3 S^3}\overline{G}_o(S) \tag{1.95}$$

avec :

$$a_0 = h^2(1 + Q_p^{-1}Q_l^{-1}) \tag{1.96}$$

$$a_1 = h(Q_p^{-1} + Q_a^{-1} + Q_l^{-1} + Q_p^{-1}Q_a^{-1}Q_l^{-1}) \tag{1.97}$$

$$a_2 = 1 + Q_a^{-1}Q_l^{-1} \tag{1.98}$$

$$b_3 = hQ_p^{-1} \tag{1.99}$$

et :

$$\overline{\xi}_o = \frac{\overline{U}_g}{Q_{eo}\omega_{so}Bl(1 + Q_a^{-1}Q_l^{-1})} \tag{1.100}$$

La courbe de réponse de l'élongation se caractérise par un minimum autour de ω_b et deux maximum de part et d'autre cette fréquence comme le montre la figure 1.13.

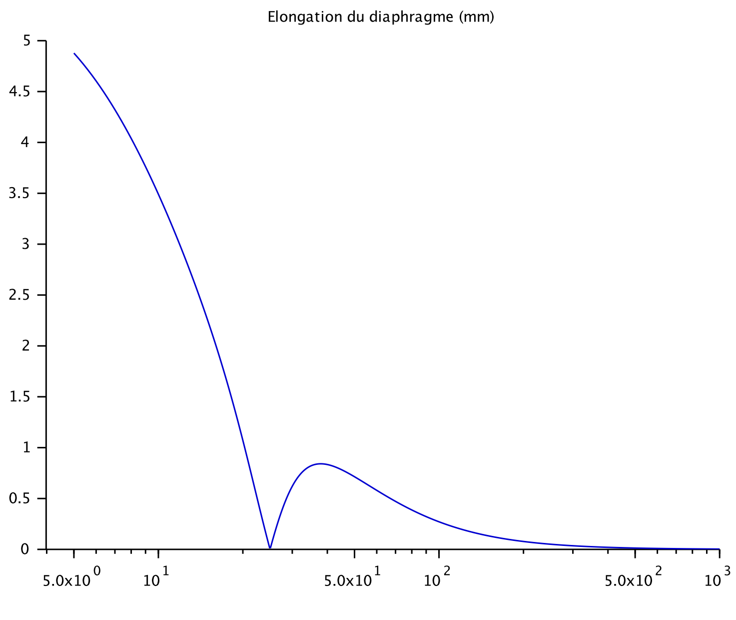

FIGURE 1.13 – Elongation du diaphragme dans une enceinte bass-reflex

1.3.6 Schéma équivalent électrique

Le schéma électrique (voir figure 1.14) se déduit du schéma acoustique.

Les éléments $C^*_{eo}, L_{es}, R_{es}, L_{eb}, R_{eb}, C^*_{ep}, R_{ep}, R_{el}$ sont les équivalents électriques de respectivement $M^*_{ao}, C_{as}, R_{as}, C_{ab}, R_{ab}, M^*_{ap}, R_{ap}, R_{al}$ selon les relations du paragraphe 1.1.7.

L'impédance du haut-parleur se calcule directement à partir du schéma électrique. L'impédance réduite s'écrit (voir annexe E ligne 83 à 107) :

$$\overline{Z}_r = \frac{b_4S^4 + b_3S^3 + b_2S^2 + b_1S + b_0}{a_4S^4 + a_3S^3 + a_2S^2 + a_1S + a_0} \tag{1.101}$$

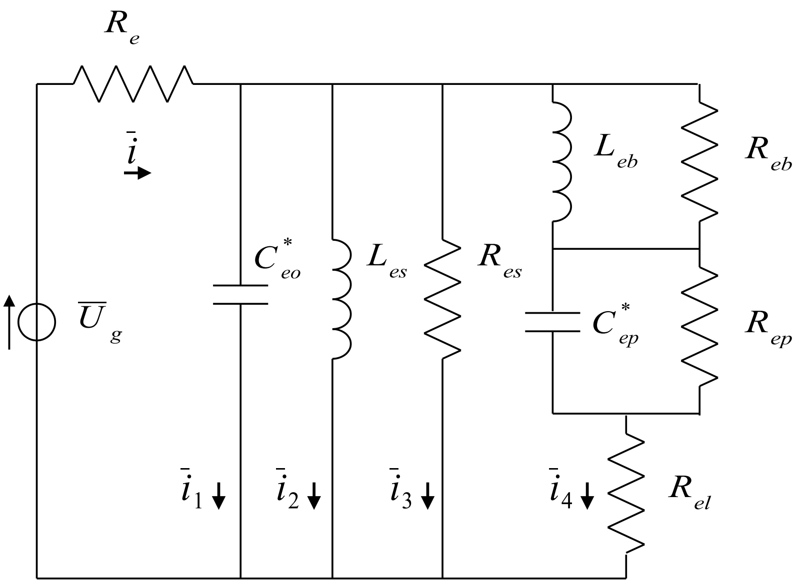

FIGURE 1.14 – Schéma électrique de l'enceinte à event

Avec :

$$
\begin{aligned}
a_0 &= h^3(1+Q_p^{-1}Q_l^{-1}) && (1.102)\\
a_1 &= h^3Q_{mo}^{-1}(1+Q_p^{-1}Q_l^{-1})\\
&\quad + h^2(Q_p^{-1}+Q_a^{-1}+Q_l^{-1}+Q_p^{-1}Q_a^{-1}Q_l^{-1}+\alpha Q_p^{-1}) && (1.103)\\
a_2 &= h^3(1+Q_p^{-1}Q_l^{-1})+h^2Q_{mo}^{-1}(Q_p^{-1}+Q_a^{-1}+Q_l^{-1}+Q_p^{-1}Q_a^{-1}Q_l^{-1})\\
&\quad + h(\alpha(1+Q_p^{-1}Q_a^{-1})+1+Q_a^{-1}Q_l^{-1}) && (1.104)\\
a_3 &= h^2(Q_p^{-1}+Q_a^{-1}+Q_l^{-1}+Q_p^{-1}Q_a^{-1}Q_l^{-1})+hQ_{mo}^{-1}(1+Q_a^{-1}Q_l^{-1})\\
&\quad + \alpha Q_a^{-1} && (1.105)\\
a_4 &= h(1+Q_a^{-1}Q_l^{-1}) && (1.106)\\
b_0 &= h^3(1+Q_p^{-1}Q_l^{-1}) && (1.107)\\
b_1 &= h^3Q_{to}^{-1}(1+Q_p^{-1}Q_l^{-1})\\
&\quad + h^2(Q_p^{-1}+Q_a^{-1}+Q_l^{-1}+Q_p^{-1}Q_a^{-1}Q_l^{-1}+\alpha Q_p^{-1}) && (1.108)\\
b_2 &= h^3(1+Q_p^{-1}Q_l^{-1})+h^2Q_{to}^{-1}(Q_p^{-1}+Q_a^{-1}+Q_l^{-1}+Q_p^{-1}Q_a^{-1}Q_l^{-1})\\
&\quad + h(\alpha(1+Q_p^{-1}Q_a^{-1})+1+Q_a^{-1}Q_l^{-1}) && (1.109)\\
b_3 &= h^2(Q_p^{-1}+Q_a^{-1}+Q_l^{-1}+Q_p^{-1}Q_a^{-1}Q_l^{-1})+hQ_{to}^{-1}(1+Q_a^{-1}Q_l^{-1})\\
&\quad + \alpha Q_a^{-1} && (1.110)\\
b_4 &= h(1+Q_a^{-1}Q_l^{-1}) && (1.111)
\end{aligned}
$$

Le numérateur de la fonction de transfert de l'impédance réduite est identique au dénominateur de la fonction de transfert de la réponse en fréquence. Le dénominateur de la fonction de transfert de l'impédance réduite est identique à son numérateur en remplaçant Q_{to}^{-1} par Q_{mo}^{-1}.

La courbe du module d'impédance présente deux bosses de résonance. La figure 1.15 montre l'effet sur cette courbe des facteurs de pertes. On remarque que Q_l a pour effet de diminuer l'amplitude des deux résonances, Q_a la deuxième et Q_p la première.

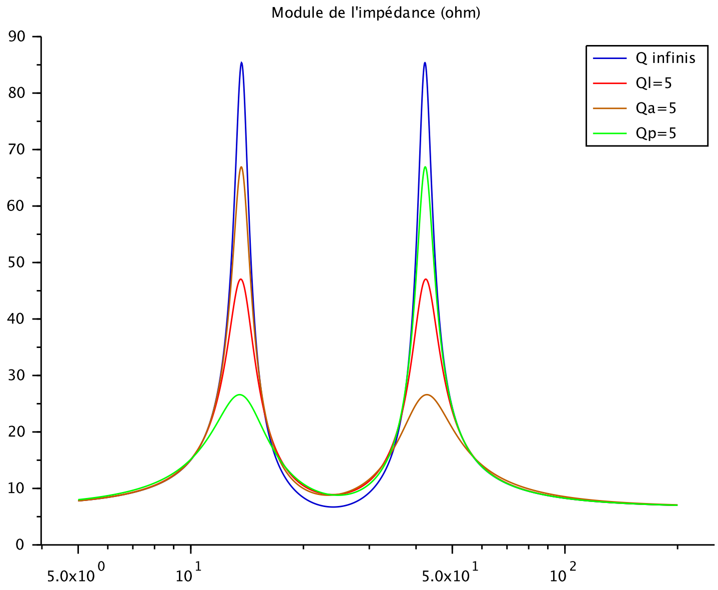

Figure 1.15 – Effet des pertes sur la courbe d'impédance

1.3.7 Alignement

L'alignement d'une enceinte à évent consiste à déterminer les paramètres du haut-parleur et de l'enceinte pour suivre une courbe de réponse donnée.

Il faut dans un premier temps normaliser la fonction de transfert de la puissance rayonnée. On introduit la pulsation ω_0 et la nouvelle variable de Laplace S^* définie par :

$$S^* = S\omega_0 = s\frac{\omega_0}{\omega_{so}} \tag{1.112}$$

de telle manière que la fonction de transfert soit sous la forme :

$$\overline{G}_o(S^*) = \frac{S^{*4} + b_3^* S^{*3}}{S^{*4} + a_3^* S^{*3} + a_2^* S^* 2 + a_1^* S^* + 1} \tag{1.113}$$

On obtient :

$$\omega_0 = \sqrt[4]{a_4/a_0} = \sqrt[4]{\frac{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}}{1 + Q_p^{-1} Q_l^{-1}} \frac{1}{\sqrt{h}}} \tag{1.114}$$

Avec :

$$a_1^* = \frac{a_1 \omega_0^3}{a_4} \tag{1.115}$$

$$a_2^* = \frac{a_2 \omega_0^2}{a_4} \tag{1.116}$$

$$a_3^* = \frac{a_3 \omega_0}{a_4} \tag{1.117}$$

$$b_3^* = \frac{b_3 \omega_0}{a_4} \tag{1.118}$$

L'alignement consiste à identifier les coefficients a_3^*, a_2^*, a_1^* et b_3^* à des fonctions de transfert particulières.

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du quatrième ordre s'écrit :

$$\overline{G}(S) = \frac{S^{*4}}{S^{*4} + c_3 S^{*3} + c_2 S^{*2} + c_1 S^* + 1} \tag{1.119}$$

On remarque que l'identification de l'équation (1.119) à l'équation (1.113) ne peut être exacte à cause du terme b_3^*.

En l'absence de perte le terme b_3^* est nul et l'identification exacte est possible. Dans ces conditions la fonction de transfert de la courbe de réponse s'écrit (voir annexe E ligne 45) :

$$\overline{G}_o(S) = \frac{hS^4}{hS^4 + hQ_{to}^{-1} S^3 + (h^3 + h(1+\alpha))S^2 + h^3 Q_{to}^{-1} S + h^3} \tag{1.120}$$

La fonction de transfert ne dépend que de trois paramètres h, α, Q_{to}. La normalisation conduit à :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{h}} \tag{1.121}$$

L'identification avec la fonction de transfert (1.119) donne :

$$c_3 = \frac{1}{\sqrt{h}} Q_{to}^{-1} \tag{1.122}$$

$$c_2 = h + \frac{(1+\alpha)}{h} \tag{1.123}$$

$$c_1 = \sqrt{h} Q_{to}^{-1} \tag{1.124}$$

Soit :

$$Q_{to} = \frac{1}{\sqrt{c_1 c_3}} \tag{1.125}$$

$$h = (a_1 Q_{to})^2 \tag{1.126}$$

$$\alpha = h(c_2 - h) - 1 \tag{1.127}$$

Ainsi à une courbe de réponse donnée correspond un unique paramètre Q_{to} et donc un unique paramètre Q_{ts}.

Dans le cas d'une enceinte avec perte, l'identification ne pouvant être exacte, on utilise une méthode de type moindres carrés sur une plage d'ajustement, par exemple, de -20 db à 0 db.

La courbe de réponse dépendant de Q_a, Q_p, Q_l, il n'y a plus de correspondance unique et il existe donc en théorie une infinité de haut-parleur pour une réponse donnée. Cependant, comme nous l'avons vu, on cherche généralement à maximiser les coefficients Q_a, Q_p, Q_l car ceux-ci conduisent toujours à réduire la fréquence de coupure.

L'ajustement par moindres carrés consiste donc à calculer h, α, Q_{to} pour Q_a, Q_p, Q_l donnés, de telle manière que la réponse en fréquence de l'enceinte soit la plus proche possible de la réponse du filtre choisi. On peut n'ajuster que h, α pour un Q_{to} donné dans la mesure ou celui-ci est proche du Q_{to} optimal.

1.3.8 Mesure de la courbe de réponse

La courbe de réponse d'une enceinte mesurée dans un local semi réverbérant étant perturbée par les ondes stationnaires qui s'y trouvent, il est quasi impossible de comparer cette courbe à celle théorique calculée par simulation.

Par contre, étant donné les faibles dimensions d'une enceinte, la mesure de la pression à l'intérieur de celle-ci est exempt de perturbation jusqu'à environ 100 hz. Etant donné qu'à partir de la mesure de la pression interne on peut recalculer la pression externe, il devient possible de comparer cette mesure à la courbe de réponse simulée (voir R. H. Small [7]).

Le microphone placé dans l'enceinte mesure la pression $\overline{P}_b$ (voir la figure 1.11). A partir de cette pression on déduit le débit $\overline{q}_b$ par :

$$\overline{P}_b = (R_{ab} + \frac{1}{j\omega C_{ab}})\overline{q}_b \tag{1.128}$$

La pression extérieure mesurée à la distance r s'écrit :

$$\overline{P}_e = \frac{\rho\omega}{2\pi r}\overline{q}_b \tag{1.129}$$

Des définitions des quantités C_{ab} et R_{ab} on tire :

$$C_{ab} = \frac{\beta V_b}{\rho c^2} \tag{1.130}$$

$$\omega R_{ab} C_{ab} = \frac{\omega}{\omega_{so}}(hQ_a)^{-1} \tag{1.131}$$

En combinant ces équations, on obtient :

$$\overline{P}_e = \frac{\beta V_b \omega_{so}^2}{2\pi r} \frac{S^2}{1 + S(hQ_a)^{-1}} \overline{P}_b \tag{1.132}$$

Ainsi connaissant les paramètres h , Q_a et en appliquant la fonction de transfert :

$$\frac{S^2}{1 + S(hQ_a)^{-1}} \tag{1.133}$$

à la mesure de la pression intérieure de l'enceinte, on reconstitue la pression extérieure que l'on peut superposer à l'amplitude et la phase de la courbe de réponse simulée.

1.3.9 Synthèse avec un haut-parleur donné

La démarche de calcul est synthétisée dans le schéma de la figure 1.16. Connaissant d'une part les paramètres du haut-parleur :

$$S_d, R_e, \omega_s, Q_{es}, Q_{ms}, V_{as} \tag{1.134}$$

Connaissant d'autre part le volume de l'enceinte V_b et une estimation des paramètres $\beta, q, \omega_p, Q_a, Q_p, Q_l$, on calcule les paramètres de l'enceinte à évent dont on déduit la courbe de réponse.

La valeur du paramètre q varie selon que les paramètres de Thiele et Small du haut-parleur aient été mesurés sur écran ou non. Si la mesure du haut-parleur a été réalisée sur un écran infini on peut faire l'hypothèse que les masses de rayonnement M_{ao}^* et M_{as}^* sont identiques et prendre $q = 1$.

Dans le cas d'une mesure en champ libre sans écran, on supposera :

$$M_{ao}^* = M_{as}^* + M_{ar} \tag{1.135}$$

avec M_{as}^* la masse issue de la mesure du haut-parleur en champ libre sans écran et $M_{ar} = \dfrac{8\rho}{3\pi}a^2$ la masse de rayonnement d'une face. On prendra donc :

$$q = \frac{M_{as}^*}{M_{as}^* + M_{ar}} \tag{1.136}$$

L'enceinte réalisée, la mesure de la courbe d'impédance permettra d'identifier les paramètres $h, \alpha, q, Q_a, Q_p, Q_l$ à partir desquels on calculera les paramètres β et ω_p. On pourra alors calculer la courbe de réponse. En remplissant plus ou moins l'enceinte de matériaux absorbant, en diminuant son volume et/ou la surface des évents on s'approchera de la courbe de réponse visée.

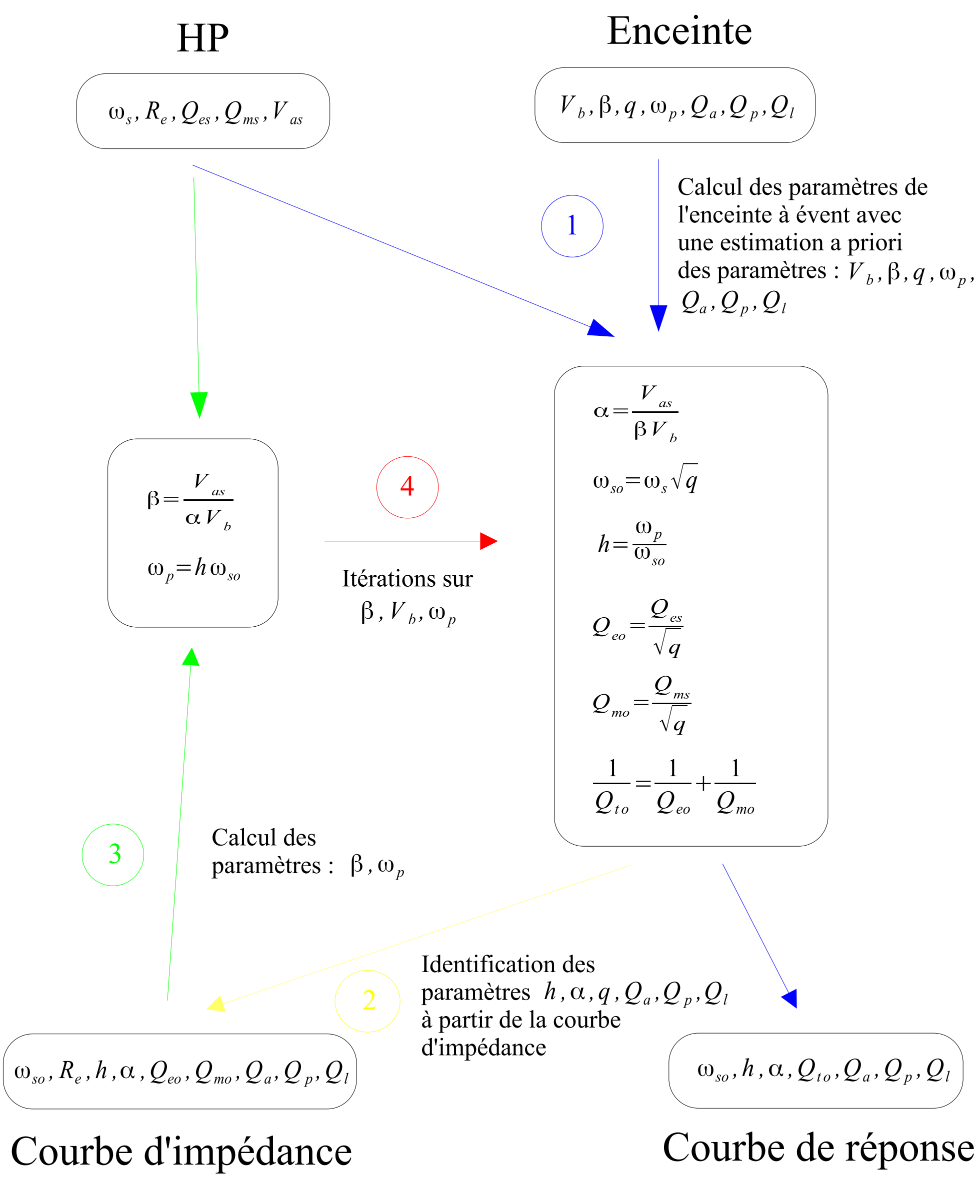

FIGURE 1.16 – Synthèse conception enceinte à évent

Chapitre 2

Utilitaires Scilab

Le logiciel Scilab peut être téléchargé <*ici*>. On trouvera à cette <*page*>, un guide pour débutant.

Scilab execute des instruction en ligne de commande ou des scripts contenants une liste d'instructions. Les fichiers de scripts portent l'extension *.sce* ou *.sic*, cette dernière étant plutôt réservée à la définition de fonctions.

Les utilitaires Scilab décrits dans ce document sont régis par la licence CeCILL (voir *www.cecill.info*).

Ces utilitaires comportent un script général de définition des fonctions de nom <*SciAudioBox.sci*> et des scripts indépendants pour la simulation et l'identification des haut-parleurs et enceintes à évent.

Pour éditer ces scripts, on utilise l'éditeur SciNotes de Scilab. On execute dans un premier temps une seule fois le script général de définition des fonctions <*SciAudioBox.sci*> puis le script dédié au calcul qu'on désire effectuer.

Il existe deux types de scripts : les scripts de simulations et les scripts d'identification de paramètres. Ces derniers utilisent la mesure d'impédance et la méthode des moindres carrés (voir annexe C).

Les fichiers de mesures de l'impédance lus par les scripts Scilab sont des fichiers textes dont chaque ligne doit contenir les données suivantes :

- la fréquence de mesure (hz) ;
- le module de l'impédance (Ω) ;
- la phase de l'impédance (en degrés comprise entre $-\pi$ et π).

Les données sont séparées par des espaces.

Le script de simulation d'une enceinte à évent utilise la mesure de la pression sonore. Les données de ce fichier, dont le format est identique à celui de l'impédance, sont les suivantes :

- la fréquence de mesure (hz) ;
- le niveau SPL (dB) ;
- la phase (en degrés).

Les structures de ces fichiers sont compatibles aves les fichiers exportés par LIMP ou REW.

L'utilisateur peut choisir les mesures prises en compte pour l'identification des paramètres. Celle-ci s'effectue en utilisant l'amplitude de l'impédance, la phase de l'impédance ou simultanément l'amplitude et la phase. Ce point sera repris lors de la description des scripts.

Le script <*SciAudioBox.sci*> initialise les valeurs de la densité atmosphérique à $\rho = 1.18\ kg/m^3$, la vitesse du son à $c = 345\ m/s$ et la pression de référence $p_0 = 20\ \mu$Pa. Ce sont les valeurs utilisées par LIMP.

2.1 Le Haut-Parleur

Deux scripts Scilab concernent le haut-parleur : le script <*Simulation HP.sce*> et <*Mesure HP.sce*>.

Le tableau suivant rappelle et résume les paramètres du haut-parleur :

Résistance de la bobine (Ω) :	R_e
Fréquence de résonance (hz) :	F_s
Facteur de qualité mécanique :	Q_{ms}
Facteur de qualité électrique :	Q_{es}
Volume d'air équivalent à la suspension (m^3) :	V_{as}
Masse du système mobile (kg) :	M_{ms}
Compliance mécanique de la suspension externe et du spider (m/N) :	C_{ms}
Resistance mécanique de pertes par frottements (N.s/m) :	R_{ms}
Produit du champs magnétique dans l'entrefer par la longueur du fil de la bobine mobile (T.m) :	Bl
Rendement (%) :	η_s
Le niveau sonore pour 1 W à 1 m (dB) :	L_p

2.1.1 Simulation d'un haut-parleur

Le script <*Simulation HP.sce*> simule la courbe d'impédance, l'élongation de la membrane, la courbe de réponse et le temps de propagation de groupe du haut-parleur monté sur un écran.

Les paramètres à saisir sont : les paramètres du haut-parleur R_e, F_s, Q_{es}, Q_{ms}, les paramètres nécessaires au calcul de l'élongation du diaphragme : P_{as}, S_d et les paramètres de tracé des courbes : F_{min}, F_{max}, N_{bp}.

La figure 2.1 représente les paramètres tels qu'ils apparaissent dans l'éditeur Scilab avec leurs significations.

```
// Simulation d'un haut-parleur

// Données d'entrées ---------------------------------------------------------

// Paramètres du haut-parleur
Re = 6.674 ;    // Résistance de la bobine (ohm)
Fs = 24.03 ;    // Frquence de résonnance (hz)
Qes = 0.27 ;    // Facteur de qualité électrique
Qms = 5.08 ;    // Facteur de qualité mécanique

// Paramètres pour le calcul de l'élongation du diaphragme
Pas = 0.062 ;     // Puissance acoustique générée (0.062 Watts = 100 dB à 1m)
Sd = 825.75241 ;  // Surface active de la membrane (cm^2)

// Paramétres des tracés
Fmin = 5 ;      // Fréquence minimum (hz)
Fmax = 1000 ;   // Fréquence maximum (hz)
Nbp = 5000 ;    // Nombre de points
```

Figure 2.1 – Paramètres de simulation d'un haut-parleur

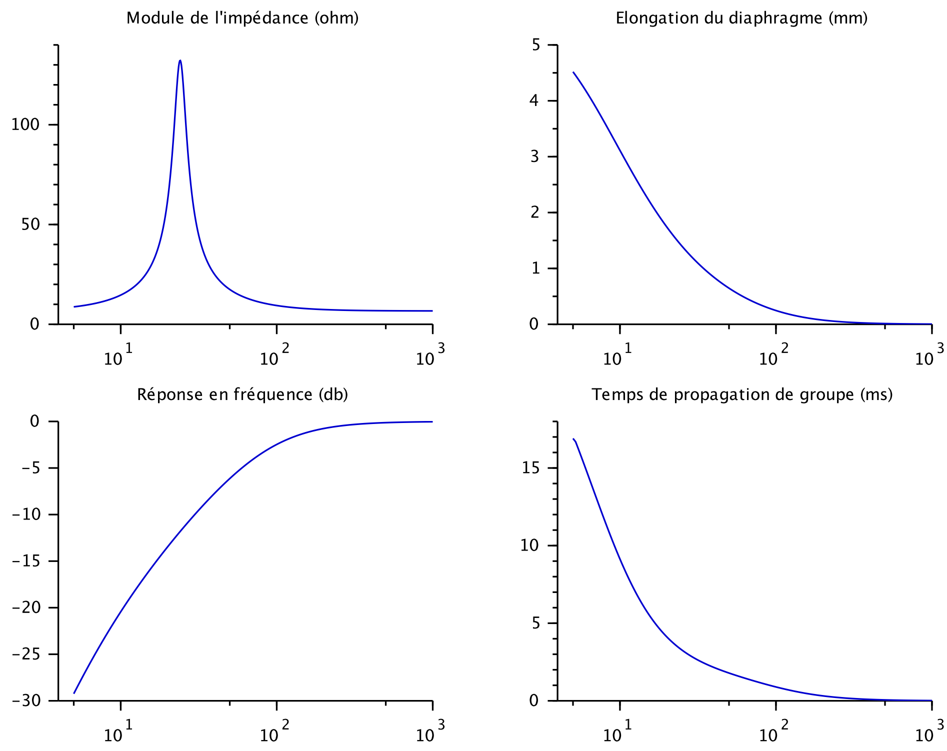

FIGURE 2.2 – Courbes de simulation d'un haut-parleur

La figure 2.2 représente les courbes de simulation avec les paramètres de la figure 2.1.

Les tracés, de gauche à droite et de haut en bas, sont : le module de l'impédance (Ω), l'élongation de la membrane (mm), la courbe de réponse (dB) et le temps de propagation de groupe (ms).

Le script calcule le facteur de qualité total Q_{ts}, la fréquence de coupure, f_3 à -3 dB ainsi que le pic de la réponse.

2.1.2 Identification des paramètres de Thiele et Small d'un haut-parleur

Le script <*Mesure HP.sce*> calcule les paramètres de Thiele et Small d'un haut-parleur à partir de la mesure de la courbe d'impédance et la méthode de la masse additionnelle. Le paramétrage de ce script est donné figure 2.3.

Le paramètre $TypAjust$ détermine les mesures utilisées pour l'estimation (mesures d'amplitude et/ou de phase).

Le paramètre $ReAjust$ permet à l'utilisateur d'estimer ou non la résistance R_e de la bobine mobile.

Le nom du fichier de mesure de l'impédance du haut-parleur doit être renseigné dans le variable fic_1. Le fichier fic_2 correspond aux mesures de l'impédance avec la masse additionnelle de valeur dm.

Si dm est nul, le fichier fic_2 n'est pas lu et le logiciel ne calcule alors que les paramètres F_s, Q_{es}, Q_{ms} et éventuellement R_e.

Si dm est différent de zéro, le fichier fic_2 doit être renseigné. Le logiciel calcule alors les paramètres supplémentaires $V_{as}, M_{ms}, C_{ms}, R_{ms}, Bl, \eta_s, L_p$.

L'utilisateur renseigne ensuite la valeur de la résistance de la bobine mobile R_e et la valeur de la surface de la membrane S_d.

L'ajustement est réalisé à partir de l'impédance de la première fréquence lu dans les fichiers de mesures jusqu'à la fréquence renseignée dans la variable $Fmax$.

Les valeurs saisies dans les variables F_s, Q_{es}, Q_{ms} (et R_e si ce dernier paramètre est ajusté), sont les valeurs initiales nécessaires à l'algorithme de calcul des moindres carrés. A la convergence, ces valeurs n'influent pas sur le résultat. On pourra saisir les valeurs nominales fournies par le constructeur du haut-parleur.

L'ajustement terminé, le script informe de la qualité de l'ajustement en imprimant le code retour de la fonction Scilab utilisée pour le calcul des moindres carrés. Ce code retour est de 1 quand l'ajustement s'est correctement effectué. En cas de mauvais ajustement, ce qui se traduit généralement par des paramètres identifiés erronés, on changera les valeurs initiales jusqu'à obtenir le bon code retour.

Le script imprime ensuite les écart-types et les valeurs maximum des résidus, c'est-à-dire les écarts entre les grandeurs mesurées et calculées. Le script trace enfin les courbes de l'impédance mesurée et calculée (amplitude et phase) ainsi que les résidus.

La figure 2.4 montre les courbes obtenu sur la mesure du haut-parleur Altec 416 de numéro 24851. Dans cet exemple la résistance de la bobine R_e n'est pas ajustée et on a utilisé les mesures d'amplitude et de phase.

```
// Mesure des paramètres d'un haut-parleur
// Les paramètres identifiés sont : Fs, Qes, Qms et éventuellement Re
// Si la valeur de la masse additionnelle est non nulle, les paramètres
// suplémentaires suivants sont identifiés : Mms, Rms, Cms Bl, Vas, ns, Lp,
// Fsd, Qesd, Qmsd, Cmsd, Rmsd

// Données d'entrées ------------------------------------------------------

// Directory où sont les fichiers de mesures
d = home+"/Sites/Audio High End/SciAudioBox/Mesures/HP 24851/";

// Type d'ajustement
// TypAjust = 1 : ajustement sur l'amplitude de l'impédance
// TypAjust = 2 : ajustement sur la phase de l'impédance
// TypAjust = 3 : ajustement sur l'amplitude et la phase de l'impédance
TypAjust = 3;

// Ajustement de la résistance de la bobine Re
// ReAjust = 1 : Re libéré
// ReAjust = 0 ; Re figé
ReAjust = 0;

// Paramètres du haut-parleur
Re = 6.505;        // Résistance de la bobine (ohm)
Sd = 825.75241 ;   // Surface active de la membrane (cm^2)

// Masse additionnelle ajoutée à celle de la bobine
dm = 34;

// Nom du fichier de mesure du HP
// Format : frequence (hz), amplitude (ohm), phase(deg)
fic1 = "Altec 416 8A 24851.txt";

// Nom du fichier de mesure du HP avec la masse additionnelle
// Ce fichier n'est pas lu si dm est nul
fic2 = "Altec 416 8A 24851 dm.txt";

// Fréquence maximum lu pour l'identification
Fmax = 100 ;

// Valeurs initiales des paramètres à identifier
// A modifier si probleme de convergence des moindres carrés
Fs = 20 ;      // Frequence de résonnance (hz)
Qes = 0.2 ;    // Facteur de qualité électrique
Qms = 10 ;     // Facteur de qualité mécanique
```

FIGURE 2.3 – Paramètres de mesure d'un haut-parleur

On obtient les paramètres suivants :

R_e	6.674 Ω	M_{ms}	55.23 g
F_s	23.98 hz	C_{ms}	0.0007978 m/N
Q_{es}	0.282	R_{ms}	1.7453667 kg/s
Q_{ms}	5.213	Bl	14.02694 Tm
Q_{ts}	0.2677	V_{as}	764 l
η_s	3.59 %	L_P	97.6 db/W à 1 m

Le calcul donne également, pour information, les paramètres du haut-parleur avec la masse additionnelle. On obtient :

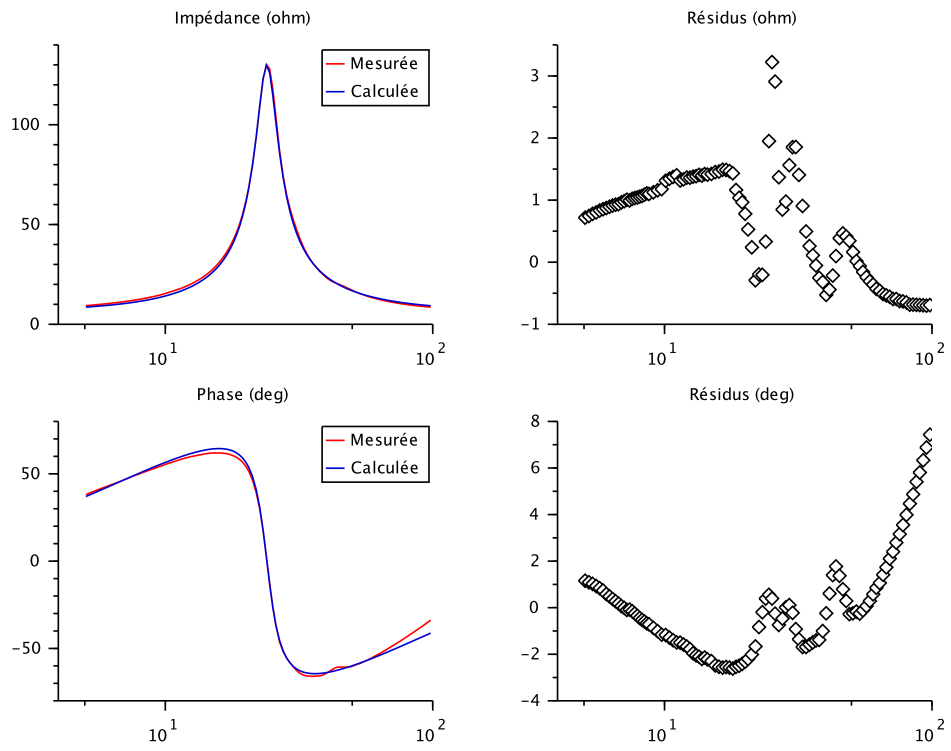

FIGURE 2.4 – Courbes de mesure d'un haut-parleur

F_{sd}	18.87 hz	Q_{msd}	5.599
F_s/F_{sd}	1.2716	C_{msd}	0.0007984 m/N
Q_{esd}	0.3586	R_{msd}	1.8881 kg/s

On remarque que le fait d'ajouter une masse modifie légèrement la souplesse de la suspension C_{ms} et plus sensiblement la résistance mécanique de perte R_{ms}.

Il faut savoir qu'en changeant les types de mesures utilisées pour l'identification des paramètres (mesure d'amplitude et/ou mesures de phase), on obtient des résultats sensiblement différents.

Une deuxième identification des paramètres du même haut-parleur en n'utilisant que les mesures de l'amplitude de l'impédance, conduit par exemple à un Q_{ts} de 0.260 au lieu de 0.268. Ces écarts sont acceptables car il ne faut pas s'attendre à mesurer plus précisément les paramètres d'un haut-parleur.

En général, il est préférable de mesurer précisément la résistance de la bobine R_e plutôt que de l'identifier dans le processus d'estimation.

La fréquence maximum des mesures utilisées pour l'identification doit être autour de 100 hz, car l'inductance de la bobine mobile, non prise en compte dans la modélisation, crée des écarts au-delà. On peut le constater sur la phase de la figure 2.4.

Enfin, il est préférable d'utiliser à la fois les mesures d'amplitude et de phase, même si ceci conduit généralement à des résidus plus élevés.

2.2 L'enceinte close

Deux scripts concernent l'enceinte close : le script <*Simulation Close.sce*> et le script <*Mesure Close.sce*>

Les tableau suivant rappelle les paramètres qui définissent une enceinte close :

Volume brut de l'enceinte (m^3) :	V_b
Facteur d'augmentation de compliance :	β
Facteur de masse acoustique :	q
Facteur de perte acoustique :	p
Facteur de compliance :	$\alpha = \dfrac{V_{as}}{\beta V_b}$
Fréquence de résonance du haut-parleur dans l'enceinte (hz) :	F_{sc}
Fréquence de résonance de l'enceinte (hz) :	F_c
Facteur de qualité mécanique :	Q_{mc}
Facteur de qualité électrique :	Q_{ec}
Facteur de qualité total :	$\dfrac{1}{Q_{tc}} = \dfrac{1}{Q_{ec}} + \dfrac{1}{Q_{mc}}$

2.2.1 Simulation d'une enceinte close

Le script <*Simulation HP.sce*> simule la courbe d'impédance, l'élongation de la membrane, la courbe de réponse et le temps de propagation de groupe d'une enceinte close.

Les paramètres à saisir sont : les paramètres du haut-parleur R_e, F_s, Q_{es}, Q_{ms} monté dans l'enceinte, le volume d'air équivalent à la compliance de la suspension V_{as}, les paramètres nécessaires au calcul de l'élongation du diaphragme P_{as}, S_d et les paramètres de tracé des courbes : F_{min}, F_{max}, N_{bp}.

Concernant les paramètres de volume, l'utilisateur peut au choix saisir le facteur d'augmentation de compliance β (b), le volume net de l'enceinte V_b et dans ce cas calculer le facteur de compliance α (a) ou saisir directement ce rapport. Dans ce cas β et V_b n'ont pas besoin d'être renseignés.

La figure 2.5 représente les paramètres tels qu'ils apparaissent dans l'éditeur Scilab avec leurs significations.

```
// Simulation d'une enceinte close

// Données d'entrées ----------------------------------------------------------

// Paramètres du Haut-Parleur
Re = 6.674 ;    // Résistance de la bobine (ohm)
Fs = 24.03 ;    // Frquence de résonnance (hz)
Qes = 0.27 ;    // Facteur de qualité électrique
Qms = 5.08 ;    // Facteur de qualité mécanique
Vas = 700 ;     // Volume d'air équivalent à la raideur de la suspension (l)

// Paramètres de volume de l'enceinte
b = 1.;     // Facteur d'augmentation de compliance
Vb = 10000;   // Volume de l'enceinte (l)
// Facteur de compliance (calculé à partir b, Vb ou saisi par l'utilisateur.
// Dans ce cas b, Vb peuvent ne pas être renseignés)
a = Vas/(b*Vb);

// Autres parametres de l'enceinte
q = 1.0;             // Facteur de masse acoustique
p = 1.0              // Facteur de perte acoustique

// Paramètres pour le calcul de l'élongation du diaphragme
Pas = 0.062 ;     // Puissance acoustique générée (0.062 Watts = 100 dB à 1m)
Sd = 825.75241 ;  // Surface active de la membrane (cm^2)

// Paramétres des tracés
Fmin = 5 ;      // Frequence minimum (hz)
Fmax = 5000 ;   // Fréquance maximum (hz)
Nbp = 5000 ;    // Nombre de points
```

FIGURE 2.5 – Paramètres de simulation d'une enceinte close

Le script trace alors, comme pour le haut-parleur : le module de l'impédance (Ω), l'élongation de la membrane (mm), la courbe de réponse (dB) et le temps de propagation de groupe (ms).

Le script calcule le facteur les paramètres de l'enceinte croise $F_{sc}, F_c, Q_{ec}, Q_{mc}$, la fréquence de coupure, f_3 à -3 dB ainsi que le pic de la réponse.

2.2.2 Identification des paramètres d'une enceinte close

Le script <*Mesure Close.sce*> calcule les paramètres d'une enceinte close à partir de la mesure de la courbe d'impédance. Le paramétrage de ce script est donné figure 2.6.

Le paramètre $TypAjust$ détermine les mesures utilisées pour l'estimation (mesures d'amplitude et/ou de phase).

Le paramètre $ReAjust$ permet à l'utilisateur d'estimer ou non la résistance R_e de la bobine mobile.

Le nom du fichier de mesure de l'impédance de l'enceinte doit être renseigné dans le variable fic.

L'utilisateur renseigne ensuite la valeur des paramètres du haut-parleur R_e, F_s, Q_{es}, Q_{ms}.

L'ajustement est réalisé à partir de l'impédance de la première fréquence lu dans les fichiers de mesures jusqu'à la fréquence renseignée dans la variable $Fmax$.

Les valeurs saisies dans les variables F_c, Q_{ec}, Q_{mc} (et R_e si ce dernier paramètre est ajusté), sont les valeurs initiales nécessaires à l'algorithme de calcul des moindres carrés. A la convergence, ces valeurs n'influent pas sur le résultat. On pourra saisir les valeurs du haut-parleur.

L'ajustement terminé, le script informe de la qualité de l'ajustement en imprimant le code retour de la fonction Scilab utilisée pour le calcul des moindres carrés. Ce code retour est de 1 quand l'ajustement s'est correctement effectué. En cas de mauvais ajustement, ce qui se traduit généralement par des paramètres identifiés erronés, on changera les valeurs initiales jusqu'à obtenir le bon code retour.

Le script imprime ensuite les écart-types et les valeurs maximum des résidus, c'est-à-dire les écarts entre les grandeurs mesurées et calculées. Le script trace enfin les courbes de l'impédance mesurée et calculée (amplitude et phase) ainsi que les résidus.

```
// Mesure des paramètres d'une enceinte close
// les valeurs Fs, Qes et Qms sont connues
// Les paramètres identifiés sont : Fc, Qec, Qmc et éventuellement Re

// Données d'entrées -----------------------------------------------------------

// Directory où sont les fichiers de mesures
d = home+"/Sites/Audio High End/SciAudioBox/Mesures/";

// Type d'ajustement
// TypAjust = 1 : ajustement sur l'amplitude de l'impédance
// TypAjust = 2 : ajustement sur la phase de l'impédance
// TypAjust = 3 : ajustement sur l'amplitude et la phase de l'impédance
TypAjust = 3;

// Ajustement de la résistance de la bobine Re
// ReAjust = 1 : Re libéré
// ReAjust = 0 ; Re figé
ReAjust = 0;

// Paramètres du haut-parleur
Re = 6.674 ;    // Résistance de la bobine (ohm)
Fs = 24.03 ;    // Frquence de résonnance (hz)
Qes = 0.27 ;    // Facteur de qualité électrique
Qms = 5.08 ;    // Facteur de qualité mécanique

// Parametres suplémentaires du HP
// Ces paramètres ne servent pas à l'identification
// Ils ne sont utilisé que pour calculer b et bVb
Vas = 700 ;   // Volume d'air équivalent à la raideur de la suspension (l)
Vb = 1000 ;     // Volume de l'enceinte (l)

// Nom du fichier de mesure de l'impédance de l'enceinte
// Format : frequence (hz), amplitude (ohm), phase(deg)
fic = "Simu Close.txt";

// Fréquence maximum lu pour l'identification
Fmax = 100 ;

// Valeurs initiales des paramètres à identifier
// A modifier si probleme de convergence des moindres carrés
Fc = Fs ;    // Frequence de résonnance (hz)
Qec = Qes ;  // Facteur de qualité électrique
Qmc = Qms ;  // Facteur de qualité mécanique
```

FIGURE 2.6 – Paramètres de mesure d'une enceinte close

2.3 L'enceinte à évent

Quatre scripts Scilab concernent l'enceinte à évent : le script <*Alignement Event.sce*>, le script <*Simulation Event.sce*>, le script <*Mesure Event.sce*>, le script <*Mesure Event avec HP.sce*> et le script <*Mesure Event avec Qmo.sce*>.

Les tableau suivant rappelle les paramètres qui définissent une enceinte à évent :

Volume brut de l'enceinte (m^3) :	V_b
Facteur d'augmentation de compliance :	β
Facteur de masse acoustique :	q
Facteur de compliance :	$\alpha = \dfrac{V_{as}}{\beta V_b}$
Fréquence de résonance du haut-parleur dans l'enceinte (hz) :	F_{so}
Fréquence de résonance de l'évent (hz) :	F_p
Rapport de résonance entre l'évent et le haut-parleur :	$h = \dfrac{F_p}{F_{so}}$
Facteur de qualité mécanique :	Q_{mo}
Facteur de qualité électrique :	Q_{eo}
Facteur de qualité total :	$\dfrac{1}{Q_{to}} = \dfrac{1}{Q_{eo}} + \dfrac{1}{Q_{mo}}$
Facteur de qualité des pertes par fuites :	Q_l
Facteur de qualité des pertes par absorption dans la boite :	Q_a
Facteur de qualité due au frottement dans l'évent :	Q_p

Le facteur de masse acoustique q permet de calculer les paramètres du haut-parleur monté dans l'enceinte à partir de ceux mesurés en dehors de celle-ci. On obtient :

$$F_{so} = F_s\sqrt{q} \ , \ Q_{eo} = \frac{Q_{es}}{\sqrt{q}} \ , \ Q_{mo} = \frac{Q_{ms}}{\sqrt{q}}$$

2.3.1 Alignement d'une enceinte à évent

Le script <*Alignement Event.sce*> calcule les paramètres h, α et éventuellement Q_{to} à partir des coefficients d'un filtre donné et des facteurs de pertes supposés Q_l, Q_a, Q_p. Le paramétrage est donnée figure 2.7.

```
// Alignement d'une enceinte à évent

// Données d'entrées -------------------------------------------------------

// Paramètres du passe haut de reference (puissances croissantes)
// n : numerateur, d : dénominateur
n=[0,0,0,0,1];
d=[1,3.1239,4.3916,3.2011,1];

// Paramètres de pertes de l'enceinte
Ql = 1e8;   // Facteur de perte par fuite
Qa = 1e8;   // Facteur de perte par absorption dans l'enceinte
Qp = 1e8;   // Facteur de perte par frottement dans l'évent

// Paramètres des tracés et d'ajustement
Fmin = 0.1 ;    // Frequence minimum normalisée
Fmax = 10 ;     // Fréquence maximum normalisée
dbMin=-20;      // Ajustement de dbMin à Fmax. dbMin doit être négatif
Nbp = 5000 ;    // Nombre de points

// Mode d'ajustement
// QtoAjust = 1 : Qto libéré
// QtoAjust = 0 ; Qto figé
QtoAjust = 0;

// Facteur de qualité total
Qto = 0.37;

// Fréquence de résonnance du haut-parleur dans l'enceinte (hz) pour le calcul
// de la fréquence de coupure et le temps de propagation de groupe
Fso = 28 ;

// Valeurs initiales des paramètres à identifier
h = 1;      // =fb/fso
a = 1.4;    // =Vas/(b*Vb)
```

FIGURE 2.7 – Paramètres d'alignement d'une enceinte à évent

L'utilisateur renseigne le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert cible. Celle-ci doit être normalisée (coefficients, d_0, d_{max}, n_{max} égaux à 1). L'exemple donné est celui d'un filtre de Bessel.

L'utilisateur renseigne ensuite les paramètres de pertes Q_l, Q_a, Q_b de son enceinte. Dans cet exemple ils sont considérés infinis (enceinte sans pertes).

Il faut ensuite saisir les données de tracés et la plage d'ajustement avec les paramètres $F_{min}, F_{max}, db_{min}, N_{bp}$. Les fréquences sont normalisées par la pulsation ω_0 (voir équation (1.114)). L'ajustement est réalisée de la fréquence correspondant à $dBmin$ de la courbe de réponse à la fréquence F_{max}.

Il faut ensuite indiquer au script de calcul si le paramètre Q_{to} est identifié ou pas. Cette option permet de calculer une enceinte avec un haut-parleur dont le Q_{to} est différent du Q_{to} optimal.

L'utilisateur saisit ensuite la valeur de la fréquence de résonance F_{so} du haut-parleur monté dans l'enceinte. Ceci n'est pas utile au calcul des paramètres de l'enceinte mais permet de calculer la fréquence de coupure et le temps de propagation de groupe sans avoir à lancer une simulation supplémentaire.

Il faut enfin renseigner les valeurs initiales des paramètres à identifier pour le calcul du moindres carrés.

Le script trace alors la courbe de réponse du filtre cible, la courbe de réponse de l'enceinte et les résidus entre ces deux valeurs. La figure 2.8 montre le résultat avec les paramètres de la figure 2.7.

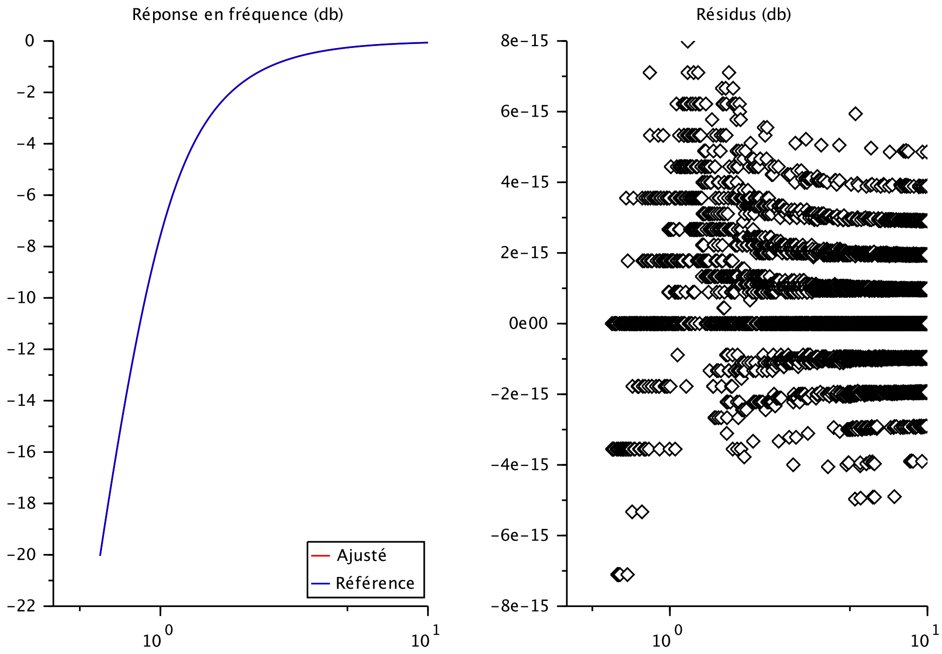

FIGURE 2.8 – Courbes d'ajustement Bessel

Ce cas correspondant à une enceinte sans perte avec un calcul du Q_{to} optimal, on obtient des résidus nuls puisque l'identification parfaite est possible (voir 1.3.7).

Le script donne les paramètres de l'enceinte optimale. On obtient :

Q_{to}	0.3162
h	0.9759
a	2.333

Ainsi, dans le cas d'une enceinte sans perte, un alignement avec un filtre de Bessel n'est possible qu'avec un haut-parleur conduisant à un Q_{to} de 0.3162.

La figure 2.9 montre les résidus d'ajustement, toujours dans le cas d'une enceinte sans perte, pour un haut-parleur de Q_{to} 0.37.

Les paramètres sont :

h	0.8246
a	1.9707

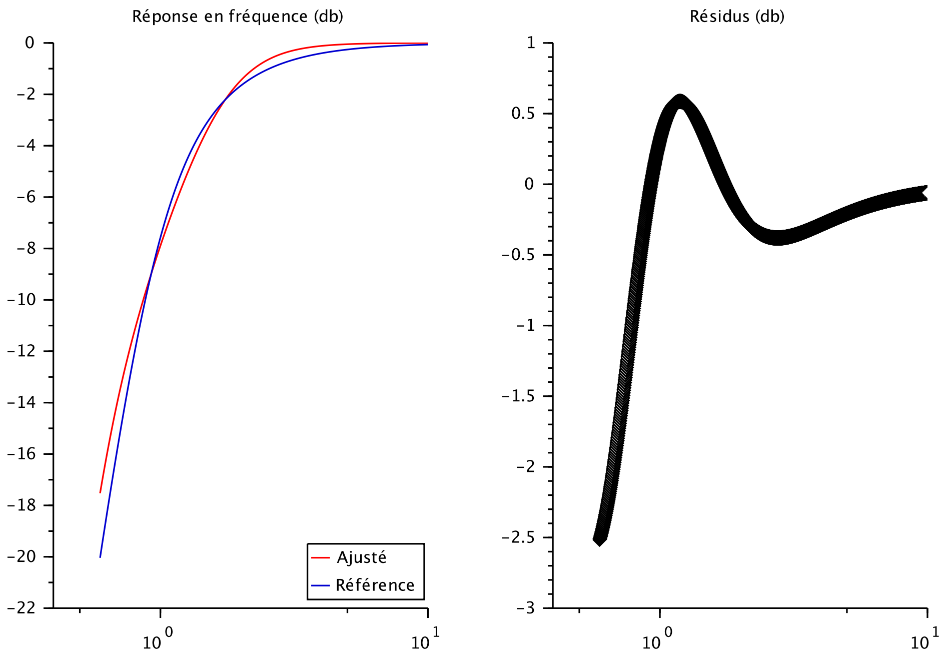

FIGURE 2.9 – Courbes d'ajustement Bessel avec Q_{to} de 0.37

2.3.2 Simulation d'une enceinte à évent

Le script <*Simulation-Event.sce*> calcule la courbe de réponse et d'impédance d'une enceinte à évent.

Les paramètres à saisir sont : les paramètres du haut-parleur monté dans l'enceinte $R_e, F_{so}, Q_{eo}, Q_{mo}$, le volume d'air équivalent à la compliance de la suspension V_{as}, les facteurs de pertes Q_l, Q_a, Q_p, les paramètres nécessaires au calcul de l'élongation du diaphragme P_{as}, S_d, le nom du fichier de mesure de la pression dans l'enceinte fic et les paramètres de tracé des courbes F_{min}, F_{max}, N_{bp}.

En ce qui concerne l'évent l'utilisateur peut entrer au choix la fréquence d'accord de l'évent F_b et dans ce cas calculer le rapport de résonance h ou saisir directement ce rapport. Dans ce cas F_b, n'a pas besoin d'être renseigné.

Concernant les paramètres de volume, l'utilisateur peut au choix saisir le facteur d'augmentation de compliance β (b), le volume net de l'enceinte V_b et dans ce cas calculer le facteur de compliance α (a) ou saisir directement ce rapport. Dans ce cas β et V_b n'ont pas besoin d'être renseignés.

La figure 2.10 montre un exemple de paramétrage.

```
// Simulation courbe de réponse et d'impédance d'une enceinte à évent

// Données d'entrées ------------------------------------------------------------

// Directory où sont les fichiers de mesures
d = home+"/Sites/Audio High End/SciAudioBox/Mesures/";

// Paramètres du haut-parleur monté dans l'enceinte
Re = 6.5 ;   // Résistance de la bobine mobile
Fso = 23 ;   // Frequence de résonnance (hz)
Qeo = 0.3 ;  // Facteur de qualité électrique
Qmo = 8 ;    // Facteur de qualité mécanique
Vas = 600;   // Volume equivalent à la raideur de la suspension (l)

// Paramètres de pertes de l'enceinte
Ql = 20;   // Facteur de perte par fuite
Qa = 15;   // Facteur de perte par absorption dans l'enceinte
Qp = 10;   // Facteur de perte par frottement dans l'évent

// Paramètres de l'évent
Fb = 40 ; // Fréquence de résonnance de l'évent (hz)
// Rapport de résonnance (calculé à partir de Fb et Fso ou saisi directement
// par l'utilisateur. Dans ce cas Fb peut ne pas être renseigné)
h = Fb/Fso;
h = 1.5;

// Paramètres de volume de l'enceinte
b = 1.;     // Facteur d'augmentation de compliance
Vb = 300;   // Volume de l'enceinte (l)
// Facteur de compliance (calculé à partir b, Vb ou saisi par l'utilisateur.
// Dans ce cas b, Vb peuvent ne pas être renseignés)
a = Vas/(b*Vb);
a = 2.;

// Paramètres pour le calcul de l'élongation du diaphragme
Pas = 0.062 ;     // Puissance acoustique générée (0.062 Watts  = 100 dB à 1m)
Sd = 825.75241 ;  // Surface activz de la membrane (cm^2)

// Nom du fichier de mesure avec le micro placé à l'intérieur de l'enceinte
// ="" si pas de fichier de mesures
fic = "";

// Paramétres des tracés
Fmin = 10 ;    // Frequence minimum (hz)
Fmax = 150 ;   // Fréquence maximum (hz)
Nbp = 5000 ;   // Nombre de points
```

FIGURE 2.10 – Paramètres de simulation d'une enceinte à évent

Le script calcule alors la fréquence de coupure à -3dB, le pic de la courbe de réponse et le temps de propagation de groupe à 20 hz, 30 hz, 40 hz et 50 hz.

Les tracés comprennent la courbe d'impédance, l'élongation de la membrane, la courbe de réponse et le temps de propagation de groupe.

Si un fichier de mesures de pression a été renseigné, cette mesure, une fois transformée, est superposée à la courbe de réponse et de temps de propagation de groupe.

2.3.3 Identification des paramètres d'une enceinte à évent

L'expression de l'impédance réduite de l'enceinte à évent donnée par l'équation (1.101) montre que celle-ci dépend des paramètres $F_{so}, Q_{eo}, Q_{mo}, Q_l, Q_a, Q_p, h$ et α.

On peut être tenté d'essayer d'identifier l'ensemble de ces paramètres à partir de la mesure de l'impédance. On pourrait ainsi mesurer les paramètres du haut-parleur et les paramètres de l'enceinte en une seule fois.

Le script <*Mesure Event.sce*> a cet objectif.

L'exemple qui suit est un essai d'identification à partir de la simulation réalisée avec les paramètres de la figure 2.10. Ces paramètres sont :

R_e (Ω)	F_{so}(hz)	Q_{eo}	Q_{mo}	Q_l	Q_a	Q_p	h	α
6.5	23	0.3	8	20	15	10	1.5	2

L'identification conduit aux paramètres suivants :

F_{so}(hz)	Q_{eo}	Q_{mo}	Q_l	Q_a	Q_p	h	α
23	0.3	7.78	18.10	15.60	10.26	1.4998	2.0001

On obtient les résidus de la figure 2.11

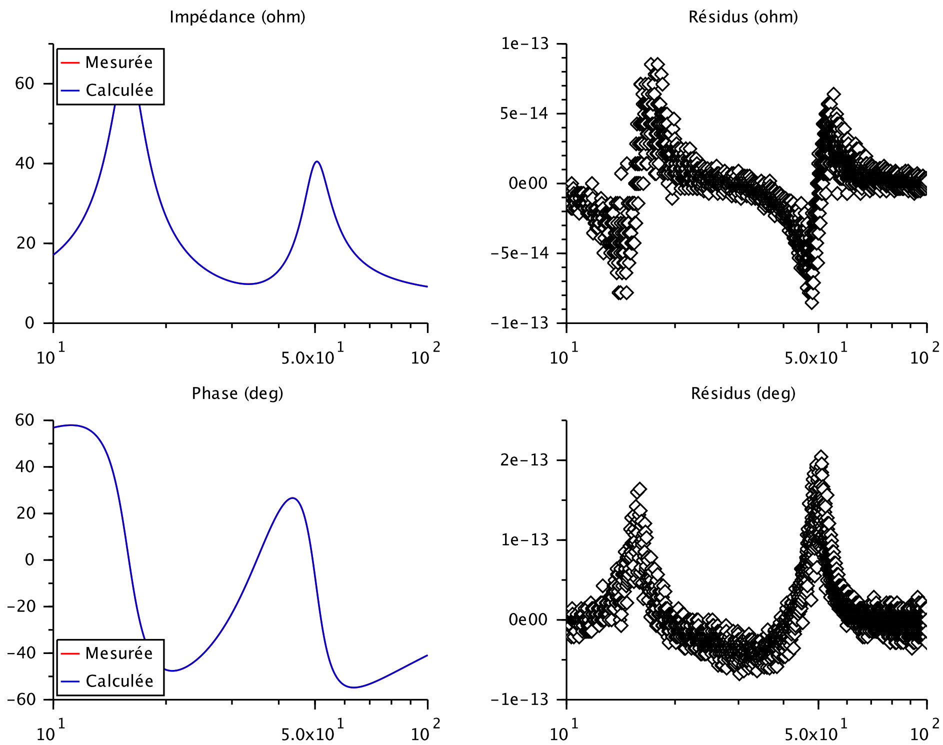

FIGURE 2.11 – Courbes de mesure de l'enceinte à évent

On remarque que les résidus sont nuls alors que la solution ne converge pas vers les paramètres de la simulation. Mis à part F_{so} et Q_{eo}, les paramètres diffèrent.

L'examen des valeurs propres de la matrice des moindres carrés montre que la valeur la plus faible vaut 2.2e-12 ce qui signifie que le système est inobservable (voir annexe C).

Le vecteur propre associé à cette valeur propre est le suivant :

F_{so}	Q_{eo}	Q_{mo}	Q_l	Q_a	Q_p	h	α
2e-7	1e-6	-0.30	-0.63	0.57	0.43	-1.9e-2	4.2e-3

Les composantes significatives portent sur les composantes Q_{mo}, Q_l, Q_a, Q_p et dans une moindre mesure sur h, α. Les composantes associées aux termes F_{so} et Q_{eo} sont pratiquement nulles. On en déduit que l'inobservabilité ne touche pas F_{so} et Q_{eo} (ce que confirme la simulation) mais concerne uniquement les autres paramètres avec principalement des variations sur Q_{mo}, Q_l, Q_a, Q_p (ce que confirme également la simulation).

Les signes des composantes du vecteur propre renseignent sur les compensations des paramètres. Une diminution de Q_{mo} se traduit par une diminution de Q_l et une augmentation de Q_a et Q_p.

En revenant au schéma électrique de l'enceinte à évent (voir la figure 1.14), on constate que la résistance R_{es} (qui définit Q_{mo}) est en parallèle des résistances R_{el}, R_{eb}, R_{ep} en séries (qui définissent respectivement Q_l, Q_a, Q_p).

On comprend qu'une augmentation de R_{es} peut être compensée par une diminution de R_{el}, R_{eb}, R_{ep} pour fournir au final la même impédance.

Etant données les expressions des facteurs de pertes en fonction des résistances associées, on déduit bien qu'une diminution de Q_{mo} conduit à une diminution de R_{es}, une diminution de Q_l à une augmentation de R_{el} et une augmentation de Q_a, Q_p à une augmentation de R_{eb}, R_{ep}.

L'annexe B donne les équations entre $Q_{mo}, Q_l, Q_a, Q_p, h, \alpha$ qui conduisent à la même impédance.

2.3.4 Identification des paramètres avec un haut-parleur connu

On utilisera pour cela le script <*Mesure Event avec HP.sce*> qui suppose connu les paramètres du haut parleur.

Etant donné qu'à partir des paramètres du haut-parleur F_s, Q_{es}, Q_{ms} et du facteur de masse acoustique q, on peut remonter aux paramètres F_{so}, Q_{eo}, Q_{mo}, ce nouveau script, en lieu et place d'identifier les paramètres F_{so}, Q_{eo}, Q_{mo}, va identifier le paramètre q.

Ceci va lever l'inobservabilité de la combinaison Q_{mo}, Q_l, Q_a, Q_p. Cependant les compensations entre ces paramètres étant inhérent à la structure de la fonction de transfert, il est évident qu'une erreur sur Q_{mo} conduira à des erreurs sur Q_l, Q_a, Q_p inobservable dans les résidus.

La figure 2.12 donne le paramètrage du script Scilab.

Le paramètre $TypAjust$ détermine les mesures utilisées pour l'estimation (mesures d'amplitude et/ou de phase).

Le paramètre $ReAjust$ permet à l'utilisateur d'estimer ou non la résistance R_e de la bobine mobile.

Le nom du fichier de mesure de l'impédance du haut-parleur doit être renseigné dans le variable fic.

L'ajustement est réalisé à partir de l'impédance de la première fréquence lu dans ce fichier jusqu'à la fréquence renseignée dans la variable $Fmax$.

Il faut ensuite renseigner les paramètres du haut-parleur : R_e, F_s, Q_{es}, Q_{ms}.

```
// Mesure des paramètres d'une enceinte à évent avec un haut-parleur dont
// les valeurs Fs, Qes et Qms sont connues
// Les paramètres identifiés sont : q, Ql, Qa, Qp, h, a et eventuellement Re

// Données d'entrées ----------------------------------------------------------

// Directory où sont les fichiers de mesures
d = home+"/Sites/Audio High End/SciAudioBox/Mesures/";

// Type d'ajustement
// TypAjust = 1 : ajustement sur l'amplitude de l'impédance
// TypAjust = 2 : ajustement sur la phase de l'impédance
// TypAjust = 3 : ajustement sur l'amplitude et la phase de l'impédance
TypAjust = 3;

// Ajustement de la résistance de la bobine Re
// ReAjust = 1 : Re libéré
// ReAjust = 0 : Re figé
ReAjust = 0;

// Nom du fichier de mesure de l'enceinte
// Format : frequence (hz), amplitude (ohm), phase (deg)
fic = "Simu Event.txt";

// Frequence maximum lu pour l'identification
Fqmax = 100 ;

// Paramatre du HP
Re = 6.5 ;    // Resistance de la bobine (ohm)
Fs = 23 ;     // Frequence de résonnance (hz)
Qes = 0.3 ;   // Facteur de qualité électrique
Qms = 8 ;     // Facteur de qualité mécanique

// Parametres suplémentaires du HP
// Ces paramètres ne servent pas à l'identification
// Ils ne sont utilisé que pour calculer b et bVb
Vas = 579.58 ;   // Volume d'air équivalent à la raideur de la suspension (l)
Vb = 273.5 ;     // Volume de l'enceinte (l)

// Valeurs initiales des paramètres à identifier
q = 1;     // Facteur de masse acoustique
Ql = 5;    // Facteur de perte par fuite
Qa = 5;    // Facteur de perte par absorption dans l'enceinte
Qp = 5;    // Facteur de perte par frottement dans l'évent
h = 1.7;   // Rapport frequence (Fb/Fso)
a = 3;     // Facteur de compliance
```

FIGURE 2.12 – Paramètres de mesure avec un haut-parleur connu

Les paramètres du haut-parleur V_{as} et le volume de l'enceinte V_b ne sont saisis que pour calculer le facteur d'augmentation de compliance β et le volume apparent de l'enceinte βV_b.

Il faut enfin saisir les valeurs initiales des paramètres identifiés : q, Q_l, Q_a, Q_p h, α.

Le calcul des paramètres avec ce script dans le cas de la simulation du paragraphe 2.3.3 conduit à retrouver exactement les paramètres de cette simulation.

L'identification avec seulement les mesures d'amplitude de l'impédance donne une valeur $p\mu_{min}$ de 0.02 (voir annexe C). Le calcul avec les mesures d'amplitude et de phase conduit à une valeur de 0.12. Il sera donc préférable d'utiliser à la fois les mesures d'amplitude et de phase.

Ajoutons que, comme ce script calcule β, il est possible à partir d'une enceinte non encore remplie d'absorbant d'identifier le paramètre V_{as} du haut-parleur. En effet, il suffira de saisir la valeur de V_{as} qui donne $\beta = 1$ pour le volume V_b mesuré de l'enceinte.

2.3.5 Identification des paramètres connaissent le Q_{mo}

Dans le cas où on ne connait pas les paramètres du haut-parleur, on pourra utiliser le script $<$*Mesure Event avec Qmo.sce*$>$ qui suppose seulement connu le paramètre Q_{mo}.

La figure 2.13 donne le paramètrage du script Scilab.

```
// Mesure des paramètres d'une enceinte à évent. La valeur Qmo du HP doit être
// connue.
// Les paramètres identifiés sont : Fso, Qeo, Ql, Qa, Qp, h, a et
// éventuellement Re

// Données d'entrées -----------------------------------------------------------
// Directory où sont les fichiers de mesures
d = home+"/Sites/Audio High End/SciAudioBox/Mesures/ONKEN 25427/";

// Type d'ajustement
// TypAjust = 1 : ajustement sur l'amplitude de l'impédance
// TypAjust = 2 : ajustement sur la phase de l'impédance
// TypAjust = 3 : ajustement sur l'amplitude et la phase de l'impédance
TypAjust = 3;

// Ajustement de la résistance de la bobine Re
// ReAjust = 1 : Re libéré
// ReAjust = 0 : Re figé
ReAjust = 0;

// Nom du fichier de mesure de l'enceinte
// Format : frequence (hz), amplitude (ohm), phase (deg)
fic = "Onken 25427.txt"

// Frequence maximum lu pour l'identification
Fqmax = 100 ;

// Paramètres du HP
Re = 6.505 ; // Resistance de la bobine (ohm)
Qmo = 8.123 ;    // Facteur de qualité électrique

// Parametres suplémentaires du HP
// Ces paramètres ne servent pas à l'identification
// Ils ne sont utilisé que pour calculer b et bVb
Vas = 579.58 ;    // Volume d'air équivalent à la raideur de la suspension (l)
Vb = 273.5 ;     // Volume de l'enceinte (l)

// Valeurs initiales des paramètres à identifier
Fso = 23 ;    // Frequence de résonnance (hz)
Qeo = 0.30 ;    // Facteur de qualité mécanique
Ql = 5;    // Facteur de perte par fuite
Qa = 5;    // Facteur de perte par absorption dans l'enceinte
Qp = 5;       // Facteur de perte par frottement dans l'évent
h = 1.6;         // Rapport frequence (Fb/Fso)
a= 2;     // Rapport Volume (Vas/(b*Vb))
```

FIGURE 2.13 – Paramètres de mesure avec un haut-parleur connu

Le paramètre $TypAjust$ détermine les mesures utilisées pour l'estimation (mesures d'amplitude et/ou de phase).

Le paramètre $ReAjust$ permet à l'utilisateur d'estimer ou non la résistance R_e de la bobine mobile.

Le nom du fichier de mesure de l'impédance du haut-parleur doit être renseigné dans le variable fic.

L'ajustement est réalisé à partir de l'impédance de la première fréquence lu dans ce fichier jusqu'à la fréquence renseignée dans la variable $Fmax$.

Il faut ensuite renseigner les paramètres du haut-parleur : R_e, Q_{mo}.

Les paramètres du haut-parleur V_{as} et le volume de l'enceinte V_b ne sont saisis que pour calculer le facteur d'augmentation de compliance β et le volume apparent de l'enceinte βV_b.

Il faut enfin saisir les valeurs initiales des paramètres identifiés : $F_{so}, Q_{eo}, Q_l, Q_a, Q_p$ h, α.

Chapitre 3

Exemple : l'enceinte ONKEN

Ce chapitre est un exemple d'utilisation des scripts décrits dans cette note. Il traite le cas des enceintes ONKEN 360 litres équipées de haut-parleurs ALTEC 416-8A.

La simulation précise de la courbe de réponse d'une enceinte à évent nécessite, comme nous l'avons vu, de connaître les facteurs de pertes Q_l, Q_a, Q_p, le facteur d'augmentation de compliance β et le facteur de masse acoustique q.

La littérature classique considère que les pertes les plus élevées sont les pertes par fuite (dépendant du facteur Q_l) et que les pertes par absorption dans l'enceinte (Q_a) et par l'évent (Q_p) sont négligeables (voir H.R Small [5] part I page 320 repris par M. Rossi [4] paragraphe 7.2.44).

Ces considérations conduisent à prendre les valeurs suivantes : Q_a et Q_p entre 50 et 100 et Q_l entre 5 et 20. Le logiciel de calcul winISD [10] prend pour défaut les valeurs : $Q_l = 10, Q_a = 100, Q_p = 100$.

L'effet de l'absorbant placé dans l'enceinte sur les paramètres Q_a et β est peu détaillé dans la littérature. Le logiciel Unibox [11] donne une valeur comprise entre 1.01 et 1.21 en fonction du remplissage.

Quand au facteur q, il dépend de comment le haut-parleur est mesuré et nous avons vu au chapitre 1.3.9 comment le calculer.

Les mesures de ce chapitre vont permettre de voir ce qu'il en est de ces recommendations.

3.1 Mesure des haut-parleurs

Les paramètres de Thiele et Small des haut-parleurs 25427 et 24851 sont donnés dans la référence [9].

Cependant avant de monter ces haut-parleurs dans les enceintes, j'ai procédé au nettoyage de la suspension (voir [12]), ce qui change de manière significative leurs caractéristiques.

La photo 3.1 montre la suspension dont un secteur a été nettoyé.

FIGURE 3.1 – Nettoyage de la suspension

Le tableau suivant montre l'évolution des paramètres de Thiele et Small. Ceux-ci sont calculés en utilisant le script de mesure <*Mesure HP.sce*> avec les mesures d'amplitude et de phase.

Réf	F_s (hz)	Q_{es}	Q_{ms}
25427 avant	25.64	0.299	5.58
25427 après	25.25	0.286	7.60
24851 avant	23.98	0.282	5.21
24851 après	22.66	0.258	7.68

Le nettoyage de la suspension a pour effet de légèrement baisser la fréquence de résonance (en augmentant la compliance) et de fortement diminuer les pertes par frottement, ce qui augmente le facteur Q_{mo}.

La figure 3.2 montre la variation du module de l'impédance du haut-parleur 24851.

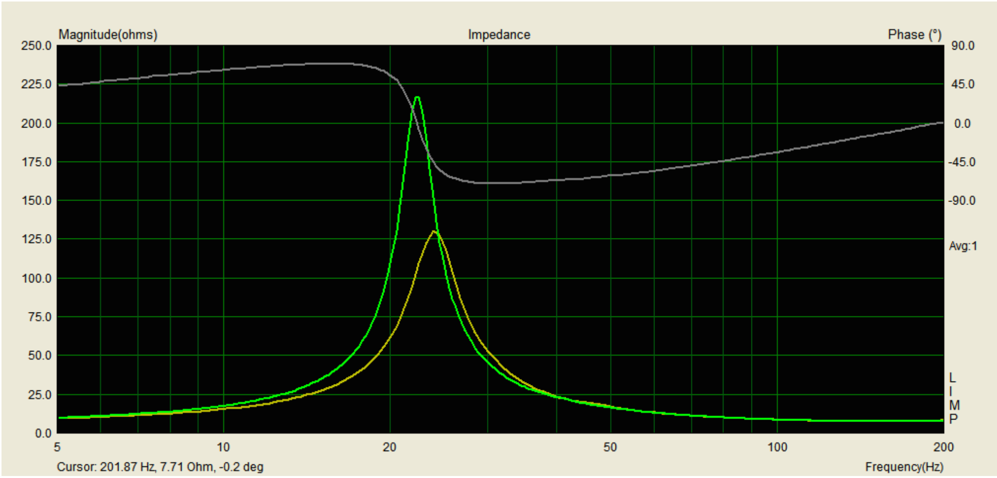

FIGURE 3.2 – Effet du nettoyage de la suspension sur l'impédance

3.2 Mesure des paramètres de l'enceinte

Nous allons décrire les mesures effectuées sur les paramètres de l'enceinte équipée du haut-parleur 24851.

Cinq configurations différentes ont été mesurées :

- configuration A : enceinte sans matériaux absorbant ;
- configuration B : placement d'un absorbant sur les cotés et le fond (voir la photo 3.3) ;
- configuration C : placement d'absorbants supplémentaire sur le dessus et le dessous (voir la photo 3.4) ;
- configuration D : enceinte avec un évent du bas bouché ;
- configuration E : enceinte avec les deux évents du bas bouchés.

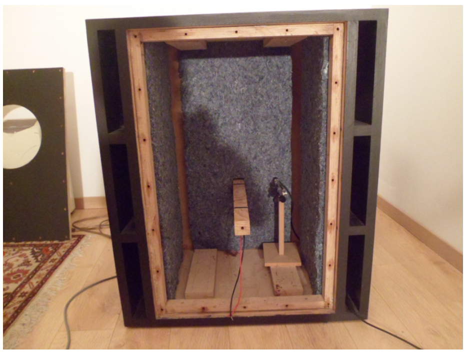

FIGURE 3.3 – Configuration B

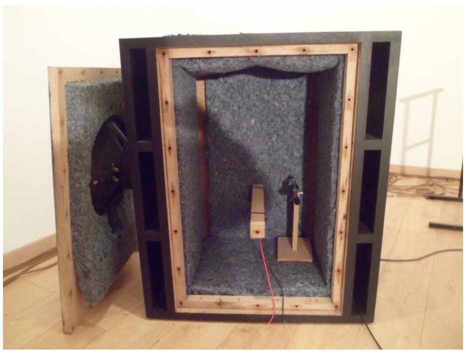

FIGURE 3.4 – Configuration C

L'absorbant utilisé est de la laine de coton de 50 mm d'épaisseur de marque <*Metisse*>.

Les mesures des paramètres de l'enceinte sont effectuées avec le script <*Mesure Event avec HP.sce*> en utilisant les mesures d'amplitude et de phase de l'impédance entre 5 hz et 100 hz.

Les résidus d'ajustement dans le cas A sont donnés figure 3.5.

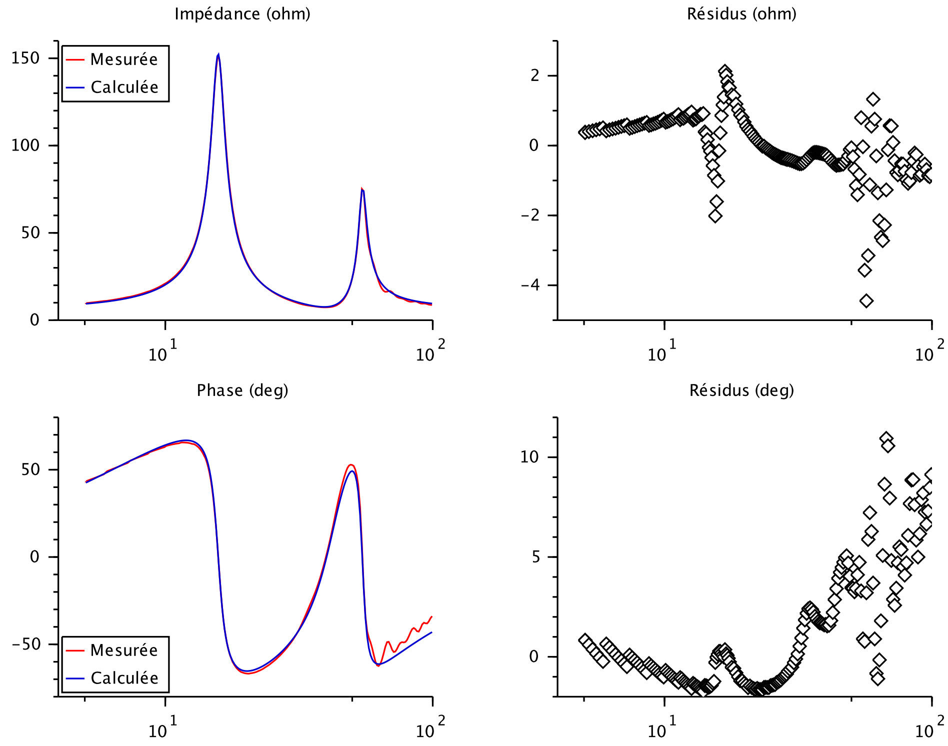

FIGURE 3.5 – Résidus d'ajustement sur l'amplitude et la phase

Les paramètres obtenus dans le cas A sont :

q	$F_{so}(hz)$	Q_{eo}	Q_{mo}	Q_l	Q_a	Q_p	h	α	$F_b(hz)$
0.900	21.50	0.272	8.093	$+\infty$	63	43	1.862	2.517	40.04

Comme on pouvait s'y attendre, le facteur de masse acoustique q est inférieur à 1. En effet la mesure du haut-parleur en dehors de l'enceinte ayant été réalisé sans écran, il y a augmentation de la masse de rayonnement en le plaçant dans l'enceinte.

Le calcul de la masse de l'équipage mobile dans les conditions de mesure donne M^*_{ms} = 53.20 gr (voir note [9]). La masse de rayonnement d'une face étant estimé à M_r =13.4 gr, on en déduit le facteur q théorique :

$$q = \frac{M^*_{ms}}{M^*_{ms} + M_r} = 0.82 \tag{3.1}$$

L'identification donne un facteur q légèrement supérieur probablement dû au fait que dans les conditions de mesure, la masse de rayonnement est légèrement supérieure à celle d'une seule face.

Le volume net calculé de l'enceinte est de 273.5 l. La valeur du paramètre V_{as} telle que le facteur d'augmentation de compliance β soit de 1 pour ce volume est de 688 l.

Le V_{as} du haut-parleur 24851 avait été estimée à 706 litres (voir note [9]). La valeur de 688 l est un peu faible sachant que le nettoyage de la suspension a eu pour effet d'augmenter cette valeur.

Concernant les paramètres de pertes, on obtient : Q_l infini (supérieur à 1000) avec des valeurs élevées pour Q_a et Q_p.

Les mesures des cas B à E donnent les résultats suivants :

Cas	q	F_{so}	Q_l	Q_a	Q_p	h	α	$F_b(hz)$	β	$\beta V_b(l)$
B	0.884	21.30	$+\infty$	29	38	1.787	2.488	38.07	1.012	276
C	0.866	21.08	$+\infty$	30	45	1.764	2.431	37.19	1.035	283
D	0.862	21.04	$+\infty$	29	36	1.499	2.415	34.08	1.042	285
E	0.856	21.01	$+\infty$	30	29	1.462	2.399	30.71	1.049	287

Les résultats sont cohérents avec ce que prévoit la théorie. En effet :

- le facteur de perte par absorption Q_a diminue avec le placement de l'absorbant, passant de 63 à 29 ;
- le facteur de compliance β augmente avec le remplissage (le volume apparent passe de 273.5 litres à 287 litres) ;
- le fait de boucher un ou deux évent diminue de manière significative la fréquence d'accord.

Le facteur de masse acoustique q diminue légèrement avec le remplissage. Ceci est également constaté sur l'autre enceinte.

Le fait de boucher les évents augmente le facteur de compliance β. Ceci est probablement dû au fait que l'évent est bouché avec un matériaux absorbant (le même que celui placé dans l'enceinte).

Les valeurs obtenues avec l'autre enceinte sont les suivantes : $q \approx 0.87$, $Q_l = \infty$, $Q_a \approx 30$, $Q_p \approx 22$, $\beta \approx 1.06$. Le facteur de perte dans l'évent est légèrement plus faible et le facteur d'augmentation de compliance légèrement plus élevé.

Ces valeurs mesurées son assez cohérentes avec ce que suggère le logiciel Unibox.

3.3 Mesure et simulation de la courbe de réponse

L'identification des paramètres de l'enceinte permet de simuler la courbe de réponse afin de la comparer à celle mesurée.

Les photos 3.3 et 3.4 montrent le placement du microphone dans l'enceinte. Celui-ci est situé sur un coté au tier de la hauteur et de la profondeur. Le microphone utilisé est un Dayton EMM6 calibré.

La figure 3.6 montre la courbe mesurée brute avec le logiciel REW dans le cas A. Le niveau sonore dans l'enceinte étant très élevé, il faut réaliser la mesure à faible niveau pour ne pas risquer d'endommager le microphone.

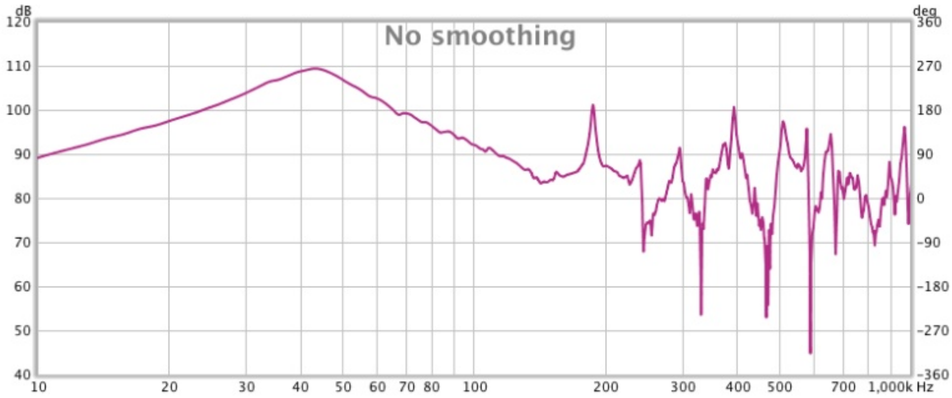

FIGURE 3.6 – Courbe de réponse mesurée cas A

On remarque une courbe très lisse jusqu'à 150 hz et des oscillations à partir de cette fréquence dues aux ondes stationnaires dans l'enceinte (ce cas ne comporte pas d'absordant).

La simulation de la courbe de réponse dans le cas A est représentée figure 3.7. Cette figure superpose les courbes théoriques calculées avec les paramètres identifiés et les courbes mesurées transformées selon les équations du chapitre 1.3.8 et filtrées au 1/12 d'octave.

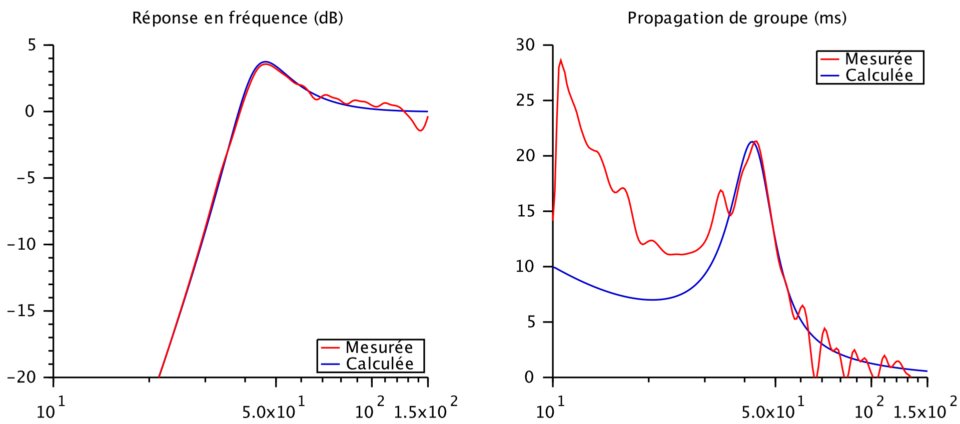

FIGURE 3.7 – Courbe de réponse cas A

On remarque la très bonne prédiction du modèle théorique. L'écart maximum d'amplitude entre la courbe théorique et celle mesurée, entre -20 dB et 80 hz, est de 0.5 dB.

A partir de 80 hz, on constate les oscillations de la courbe de réponse mesurée.

Le temps de propagation de groupe mesuré suit globalement celui calculé. La remonté pour les fréquences inférieures à 20 hz est probablement dû à la fréquence de coupure du microphone qui est de 18 hz.

La réponse de l'enceinte dans le cas A donne une fréquence de coupure de 35.2 hz et une surtension de 3.9 dB à 46.2 hz.

Les courbes de la figure 3.8 montrent la réponse dans le cas C (enceinte avec son absorbant, tous les évents ouverts).

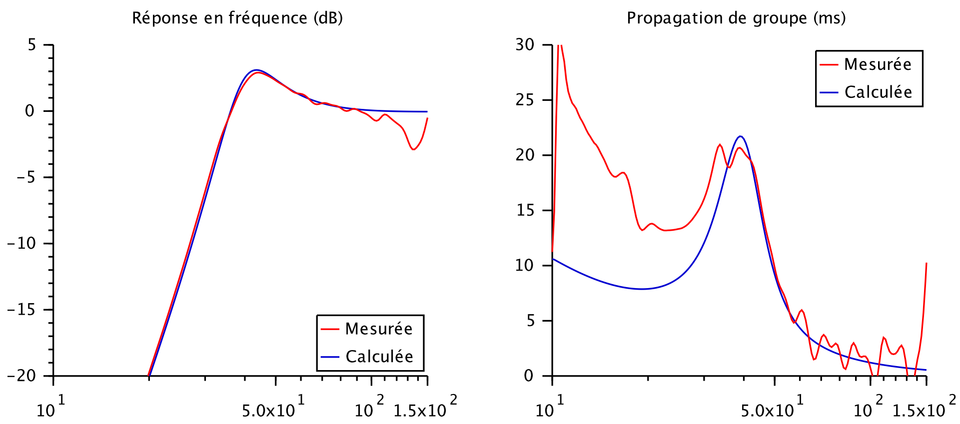

FIGURE 3.8 – Courbe de réponse cas C

Le fait de placer l'absorbant diminue la surtension (3.1 dB à 43.6 hz) et légèrement la fréquence de coupure qui passe à 33.1 hz.

Les courbes de la figure 3.9 sont celles du cas E. Le fait de boucher 2 évents sur 6 a un effet très bénéfique sur la courbe de réponse. La surtension n'est plus que de 0.28 dB et la fréquence de coupure passe à 29.8 hz.

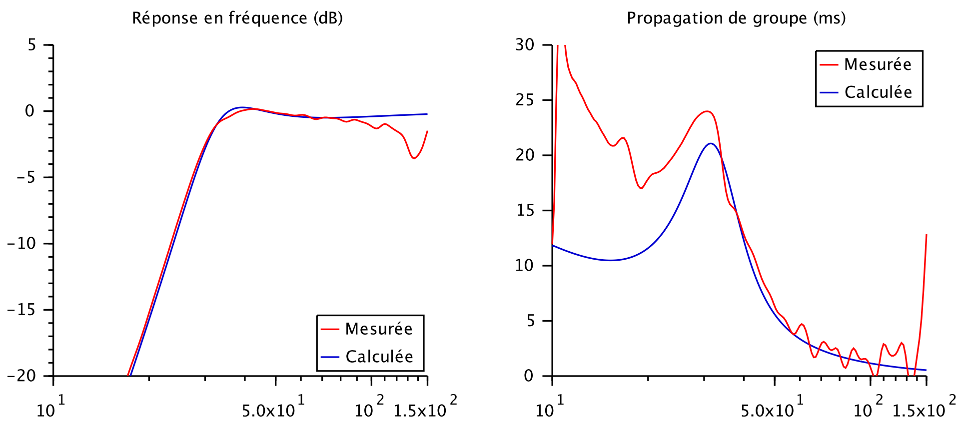

FIGURE 3.9 – Courbe de réponse cas E 24851

Les courbe de la figure 3.10 sont celles de la deuxième enceinte toujours dans le cas E. La fréquence de coupure est de 30.0 hz.

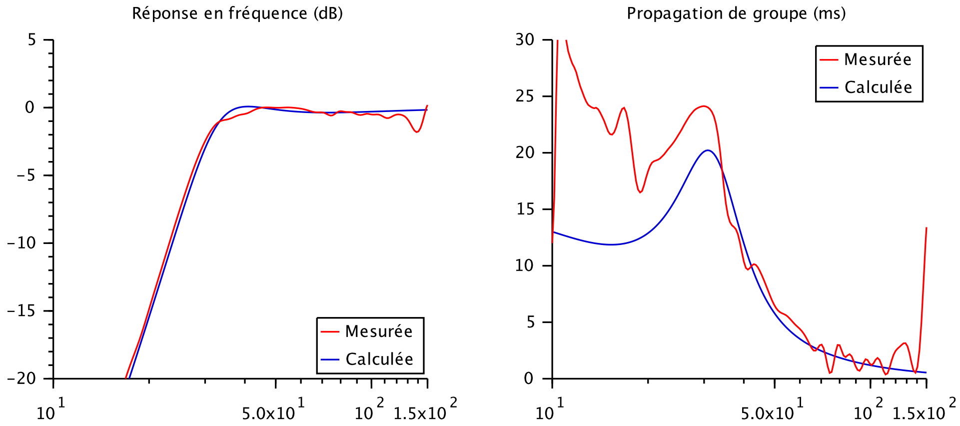

FIGURE 3.10 – Courbe de réponse cas E 25427

Ce sont les configurations E qui sont retenues.

Bibliographie

[1] Scilab : logiciel de calcul numérique : `http://www.scilab.org/fr`

[2] Logiciel ARTA : `http://www.artalabs.hr`

[3] Logiciel REW : `http://www.roomeqwizard.com`

[4] M. Rossi, Electro-acoustique. Dunod.

[5] R. H. Small, Vented-Box Loudspeakers Systems. Part I-IV. Journal of the Audio Engineering Society.

[6] R. H. Small, Closed-Box Loudspeakers Systems. Part I-III. Journal of the Audio Engineering Society.

[7] R. H. Small, Simplified Loudspeaker Measurements at Low Frequencies. Journal of the Audio Engineering Society.

[8] Ivo Mateljan, Marjan Sikora, Estimation of Loudspeaker Driver Parameters. 5th Congress of Alps-Adria Acoustics Association

[9] Jean Fourcade : Calcul des paramètres de Thiele et Small d'un Haut-Parleur avec LIMP : <*Mesure TS.pdf*>

[10] Logiciel de calcul d'enceinte WinISD : `http://www.linearteam.dk`

[11] Logiciel de calcul d'enceinte uniBox : `http://audio.claub.net/software/kougaard/ubmodel.html`

[12] Forum Melaudia : Altec restauration suspensions <*lien*>

[13] Paul Legendre : L'estimation paramétrique : la méthode des moindres carrés. Cépadues.

Annexe A

Equations différentielles du Haut-Parleur

Notons p la différence de pression entre la pression instantanée et la pression statique. En l'absence de champ sonore p est nul en tout point de l'espace. Notons p_1 la pression acoustique située en avant de la membrane et p_2 celle située en arrière. Notons enfin U_g la tension du générateur qui alimente le haut-parleur. On suppose que la résistance interne du générateur négligeable.

Nous adopterons les conventions de signe suivantes :

- le déplacement de la membrane est compté positivement vers l'avant ;
- un courant positif parcouru dans la bobine mobile déplace la membrane vers l'avant.

La membrane est soumise à un ensemble de force qui sont :

- la force motrice due au courant i parcourant la bobine mobile égale à $(Bl)i$;
- la force due à la pression de l'air devant la membrane de valeur $-p_1 S_d$;
- la force due à la pression de l'air derrière la membrane de valeur $p_2 S_d$;
- la force de rappel due à la suspension égale à $-\dfrac{\xi_d}{C_{ms}}$;
- la force de frottement égale à $-R_{ms}\dfrac{d\xi_d}{dt}$.

L'application du principe fondamental de la mécanique conduit à l'équation différentielle suivante :

$$(Bl)i - p_1 S_d + p_2 S_d = M_{ms}\frac{d^2\xi_d}{dt^2} + R_{ms}\frac{d\xi_d}{dt} + \frac{\xi_d}{C_{ms}} \tag{A.1}$$

Appliquons à présent la loi d'Ohm en tenant compte de la force contre-électromotrice générée par le déplacement de la membrane dans l'entrefer. On obtient :

$$U_g = R_e i + (Bl)\frac{d\xi_d}{dt} \tag{A.2}$$

Ces deux équations différentielles couplées régissent le mouvement de la membrane ξ_d et le courant i parcouru dans la bobine. Pour résoudre ces équations, on utilise la transformée de Laplace. Nous noterons s la variable de Laplace et de manière générale $\overline{F}$ la transformée de Laplace de la fonction F.

On définit q_d le débit du diaphragme exprimé en m^3/s par :

$$q_d = S_d v_d \tag{A.3}$$

En se ramenant à l'élongation de la membrane $\overline{\xi_d}$, on obtient :

$$\overline{q_d} = sS_d\overline{\xi_d} \tag{A.4}$$

On définit les impédances de rayonnement de la face avant et arrière de la membrane par :

$$\overline{Z}_{ar1} = \frac{\overline{p}_1}{\overline{q}_d} \text{ et } \overline{Z}_{ar2} = -\frac{\overline{p}_2}{\overline{q}_d}$$

Le signe moins dans l'impédance arrière provient du fait que le débit à prendre en compte est l'opposé du débit de la face avant. On obtient alors :

$$(Bl)\overline{i} = \left(s\frac{M_{ms}}{S_d} + \frac{R_{ms}}{S_d} + \frac{1}{sS_dC_{ms}} + \overline{Z}_{ar1}S_d - \overline{Z}_{ar2}S_d\right)\overline{q}_d \tag{A.5}$$

$$\overline{U}_g = R_e\overline{i} + \frac{(Bl)}{S_d}\overline{q}_d \tag{A.6}$$

Le schéma équivalent acoustique du haut-parleur s'obtient en éliminant le courant $\overline{i}$ de la première équation. On obtient :

$$\frac{(Bl)\overline{U}_g}{S_dR_e} = \left(s\frac{M_{ms}}{S_d^2} + \frac{(Bl)^2}{S_d^2R_e} + \frac{R_{ms}}{S_d^2} + \frac{1}{sS_d^2C_{ms}} + \overline{Z}_{ar1} + \overline{Z}_{ar2}\right)\overline{q}_d \tag{A.7}$$

On définit la pression d'excitation $\overline{P}_g$ exprimée en Pa par :

$$\overline{P}_g = \frac{(Bl)}{S_dR_e}\overline{U}_g \tag{A.8}$$

En assimilant $\overline{P}_g$ à une source de tension et $\overline{q}_d$ à un courant l'equation (A.7) est alors celle qui décrit le fonctionnemen du schéma électrique suivant :

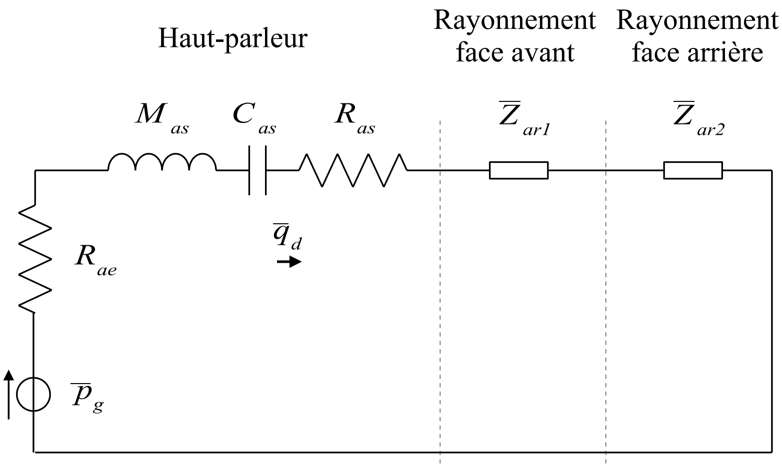

FIGURE A.1 – Schema acoustique du Haut-Parleur

Avec :

Résistance acoustique des pertes dues à la résistance de la bobine (Pa.s/m^3) :	$R_{ae} = \dfrac{(Bl)^2}{S_d^2 R_e}$
Résistance acoustique des pertes par frottement (Pa.s/m^3) :	$R_{as} = \dfrac{R_{ms}}{S_d^2}$
Masse acoustique de l'équipage mobile (kg/m^4) :	$M_{as} = \dfrac{M_{ms}}{S_d^2}$
Compliance acoustique de la suspension (m^3/Pa) :	$C_{as} = S_d^2 C_{ms}$
Impédance de rayonnement de la face avant de la membrane (Pa.s/m^3) :	$\overline{Z}_{ar1}$
Impédance de rayonnement de la face arrière de la membrane (Pa.s/m^3) :	$\overline{Z}_{ar2}$

Le schéma équivalent électrique du haut-parleur s'obtient en éliminant le débit $\overline{q}_d$ de la deuxième équation. On obtient :

$$\overline{U}_g = R_e \overline{i} + \frac{\overline{i}}{\dfrac{M_{ms}}{(Bl)^2} j\omega + \dfrac{1}{\dfrac{(Bl)^2}{R_{ms}}} + \dfrac{1}{(Bl)^2 C_{ms}} \dfrac{1}{j\omega} + \dfrac{1}{\dfrac{(Bl)^2}{S_d^2 \overline{Z}_{ar1}}} + \dfrac{1}{\dfrac{(Bl)^2}{S_d^2 \overline{Z}_{ar2}}}} \tag{A.9}$$

On définit alors les paramètres suivants :

Equivalent électrique de R_{ms} (Ω) :	$R_{es} = \frac{(Bl)^2}{R_{ms}} = \frac{(Bl)^2}{S_d^2 R_{as}}$
Equivalent électrique de M_{ms} (F) :	$C_{es} = \frac{M_{ms}}{(Bl)^2} = \frac{M_{as} S_d^2}{(Bl)^2}$
Equivalent électrique de C_{ms} (H) :	$L_{es} = C_{ms}(Bl)^2 = \frac{C_{as}(Bl)^2}{S_d^2}$
Equivalent électrique du rayonnement $\overline{Z}_{ar1}$ (Ω) :	$\overline{Z}_{er1} = \frac{(Bl)^2}{S_d^2 \overline{Z}_{ar1}}$
Equivalent électrique du rayonnement $\overline{Z}_{ar2}$ (Ω) :	$\overline{Z}_{er2} = \frac{(Bl)^2}{S_d^2 \overline{Z}_{ar2}}$

Ce qui conduit au schéma électrique du haut-parleur :

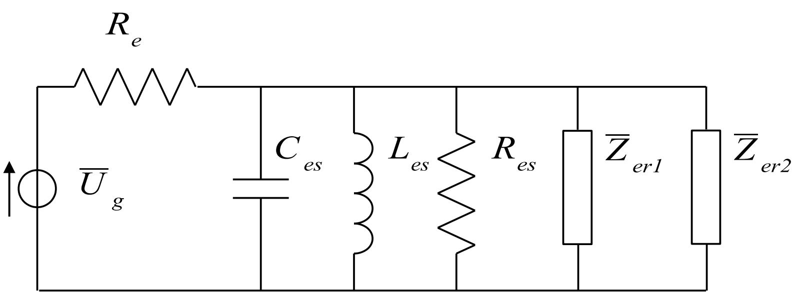

FIGURE A.2 – Schema électrique du haut-parleur

Annexe B

Variations de l'impédance d'une enceinte à évent

Le chapitre 2.3.3 à montré qu'il n'était pas possible d'observer tous les paramètres $F_{so}, Q_{eo}, Q_{mo}, Q_l, Q_a, Q_p, h, \alpha$ à partir de la courbe d'impédance de l'enceinte à évent.

Revenons sur l'expression de la fonction de transfert de l'impédance donnée dans le chapitre 1.3.6. En normalisant les coefficients de cette fonction de transfert de telle manière que le terme en facteur de S^4 soit égal à un, on obtient les coefficients du dénominateur suivants :

$$
\begin{aligned}
a_0 &= h^2 \frac{1 + Q_p^{-1} Q_l^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} \\
a_1 &= Q_{mo}^{-1} h^2 \frac{(1 + Q_p^{-1} Q_l^{-1})}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} + h \frac{Q_p^{-1} + Q_a^{-1} + Q_l^{-1} + Q_p^{-1} Q_a^{-1} Q_l^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} + h\alpha \frac{Q_p^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} \\
a_2 &= h^2 \frac{1 + Q_p^{-1} Q_l^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} + Q_{mo}^{-1} h \frac{Q_p^{-1} + Q_a^{-1} + Q_l^{-1} + Q_p^{-1} Q_a^{-1} Q_l^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} + \alpha \frac{1 + Q_p^{-1} Q_a^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} + 1 \\
a_3 &= h \frac{Q_p^{-1} + Q_a^{-1} + Q_l^{-1} + Q_p^{-1} Q_a^{-1} Q_l^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} + Q_{mo}^{-1} + \frac{\alpha}{h} \frac{Q_a^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}}
\end{aligned}
$$

Les coefficients du numérateur s'obtiennent en remplaçant dans les équations ci-dessus Q_{mo} par Q_{to}.

Comme nous allons le montrer, il existe une infinité de paramètres qui donnent la même fonction de transfert.

Imaginons dans un premier temps plusieurs jeux de ces paramètres donnant les mêmes valeurs des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3. Qu'en est-il alors des coefficients b_1, b_2, b_3 ?

Examinons les termes en facteur de Q_{mo}^{-1}. Dans le coefficient a_1, le terme en facteur de Q_{mo}^{-1} est a_0 qui est constant quelque soit le jeu de paramètres utilisé. Supposons que ce soit également le cas pour le terme en facteur de Q_{mo}^{-1} dans le coefficient a_2, ce qui implique :

$$
h \frac{Q_p^{-1} + Q_a^{-1} + Q_l^{-1} + Q_p^{-1} Q_a^{-1} Q_l^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} = cst \tag{B.1}
$$

On en déduit alors que si a_0, a_1, a_2, a_3 ont les mêmes valeurs pour l'ensemble des jeux de paramètres $Q_{eo}, Q_{mo}, Q_l, Q_a, Q_p, h, \alpha$, alors il suffit que Q_{eo} soit constant pour que les paramètres b_1, b_2, b_3 soient également constants. Cette propriété vient du fait que $Q_{to}^{-1} = Q_{eo}^{-1} + Q_{mo}^{-1}$ et que les termes en facteurs de Q_{mo}^{-1} sont constant.

En exploitant le fait que les termes en facteurs de Q_{mo} sont constants et en réorganisant les équations, on obtient les conditions suivantes :

$$
\begin{aligned}
&Q_{eo}^{-1} = cst \\
&h^2 \frac{1 + Q_p^{-1} Q_l^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} = cst \\
&h \frac{Q_p^{-1} + Q_a^{-1} + Q_l^{-1} + Q_p^{-1} Q_a^{-1} Q_l^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} = cst \\
&Q_{mo}^{-1} h^2 \frac{1 + Q_p^{-1} Q_l^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} + h\alpha \frac{Q_p^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} = cst \\
&Q_{mo}^{-1} h \frac{Q_p^{-1} + Q_a^{-1} + Q_l^{-1} + Q_p^{-1} Q_a^{-1} Q_l^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} + \alpha \frac{1 + Q_p^{-1} Q_a^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} = cst \\
&Q_{mo}^{-1} + \frac{\alpha}{h} \frac{Q_a^{-1}}{1 + Q_a^{-1} Q_l^{-1}} = cst
\end{aligned}
$$

On vérifie que ces conditions impliquent que les coefficients du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert sont identiques, ce qui revient à dire que la fonction de transfert est elle-même identique.

Etant donné qu'il y a 7 paramètres $Q_{eo}, Q_{mo}, Q_l, Q_a, Q_p, h, \alpha$ pour seulement 6 relations, le système possède un degré de liberté.

Remarquons que si les jeux de paramètres sont tel que $Q_p = Q_a$, alors l'expression du coefficient a_0 conduit à ce que h soit constant. De manière générale h et α varient peu. Les variations consistent principalement à des compensations entre Q_{mo}, Q_l, Q_a, Q_p.

Annexe C

Méthode des moindres carrés

L'estimation des paramètres d'un haut-parleur ou d'une enceinte est réalisé en utilisant la méthode des moindres carrés à partir des mesures du module et/ou de la phase de l'impédance. Rappelons quelques propriétés de cette méthode. Examinons dans un premier temps le cas linéaire.

Soit x un vecteur de paramètre à estimer (de dimension p) et z un ensemble de mesures (de dimension m). Supposons la relation linéaire matricielle suivante :

$$Jx = z + \epsilon \tag{C.1}$$

On ne s'intéresse qu'au cas $m > p$ et on cherche le vecteur x qui minimise l'écart quadratique :

$$|z - Jx|^2 \tag{C.2}$$

La solution à ce problème, dite solution des moindres carrés, est :

$$\hat{x} = (J^T J)^{-1} J^T z \tag{C.3}$$

Le vecteur ϵ calculé avec $\hat{x}$ est le vecteur dit des résidus.

On note $A = J^T J$.

Dans le cas des mesures d'impédance, la relation qui lie les paramètres x aux mesures z n'est pas linéaire. On note $Z(x, f)$ la fonction de transfert qui calcule le module de l'impédance à la fréquence f pour un jeu de paramètre x et $Z(x)$ le vecteur des évaluations de $Z(x, f)$ aux fréquences f_i auxquelles sont calculés le vecteur z.

On cherche maintenant à minimiser l'écart quadratique :

$$|z - Z(x)|^2 \tag{C.4}$$

La solution consiste à linéariser la fonction Z autour d'une solution initiale x_k. En notant $J(x)$ la matrice Jacobienne de dimension m x p définie par :

$$J_{i,j}(x) = \frac{\partial Z(x, f_i)}{\partial x_j} \tag{C.5}$$

on peut écrire :

$$Z(x) = Z(x_k) + J(x_k)\delta x \tag{C.6}$$

On cherche à présent à calculer δx à partir de x_k minimisant :

$$|z - Z(x_k) - J(x_k)\delta x|^2 \tag{C.7}$$

Le problème est redevenu linéaire et la solution s'écrit :

$$\delta x = (J(x_k)^T J(x_k))^{-1} J(x_k)^T (z - Z(x_k)) \tag{C.8}$$

d'où l'on déduit :

$$x_{k+1} = x_k + \delta x \tag{C.9}$$

En procédant par itérations successives jusqu'à que $|\delta x|$ tende vers zéro on obtient un estimé $\hat{x}$ de la solution du problème non linéaire.

La solution des moindres carrés consistant à inverser la matrice A, le conditionnement de cette matrice détermine directement la précision de l'estimation.

On mesure le degré d'inobservabilité d'une composante de x par le facteur d'inflation de la variance FIV (voir référence [13]).

Le facteur d'inflation de la variance est l'accroissement de la variance de cette composante par rapport à une situation où toutes les variables de x n'ont pas de relations linéaires.

Effectuons une transformation linéaire sur les paramètres x en posant :

$$\overline{x} = Kx \tag{C.10}$$

avec K une matrice diagonale dont les éléments sont :

$$k_i = \sqrt{J_i^T J_i} \tag{C.11}$$

J_i étant la i$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice J.

La relation (C.1) s'écrit :

$$JK^{-1}\overline{X} = z + \epsilon \tag{C.12}$$

Soit :

$$\overline{J}\ \overline{X} = z + \epsilon \tag{C.13}$$

avec $\overline{J} = JK^{-1}$. La matrice $\overline{A}$ associée à l'estimation de $\overline{x}$ s'écrit alors :

$$\overline{A} = \overline{J}^T \overline{J} = K^{-1} J^T J K^{-1} \tag{C.14}$$

Cette matrice à tous ses éléments diagonaux égaux à 1 ; elle est sous la forme d'une matrice de correlation.

Le diagnostic pour quantifier l'inobservabilité repose sur l'analyse spectrale de la matrice $\overline{A}$. En effet, si on note s^i (pour i variant de 1 à p) une base orhtonormale constituée des vecteurs propres de $\overline{A}$, le vecteur s_j étant associé à la valeur propre μ_j, alors le facteur d'inflation de la variance (FIV) du paramètre i de x s'écrit :

$$FIV_i = \sum_j \frac{s_{ij}^2}{\mu_j} \tag{C.15}$$

avec s_{ij} la i$^{\text{ème}}$ composante du vecteur s_j. Cette relation montre que de faibles valeurs propres conduisent à de grand facteur d'inflation de variance.

L'analyse de l'inobservabilité consiste à calculer la valeur propre la plus faible de $\overline{A}$.

Si $p\mu_{min}$ est inférieur à 10^{-3} on dit que l'inobservabilité est sévère. Si cette même valeur est comprise entre 10^{-3} et 10^{-2} l'inobservabilité est dite forte.

Cette relation provient du fait que :

$$\max_i (FIV)_i \geq \frac{1}{p\mu_{min}} \tag{C.16}$$

Les vecteurs propres correspondant aux faibles valeurs propres donnent les coefficients des combinaisons linéaires des paramètres normalisés les plus mal observées.

Annexe D

Résultats Maple concernant le haut-parleur

Equations du Haut-Parleur

```
> restart ;
```

Calcul du débit du diaphragme

M*as noté M2as

```
> qd := Pg /(R_ae+R_as+s*M2_as+1/(s*C_as)) ;
```

$$qd := \frac{Pg}{R\_ae + R\_as + s\, M2\_as + \frac{1}{s\, C\_as}} \tag{1}$$

Expression du débit

```
> qd := simplify(qd) ;
```

$$qd := \frac{Pg\, s\, C\_as}{R\_ae\, s\, C\_as + R\_as\, s\, C\_as + s^2\, M2\_as\, C\_as + 1} \tag{2}$$

Valeur de la pression

```
> Pg := Bl*Ug/(S_d*R_e) ;
```

$$Pg := \frac{Bl\, Ug}{S\_d\, R\_e} \tag{3}$$

Valeur de la résistance

```
> R_e := Bl^2/(S_d^2*R_ae) ;
```

$$R\_e := \frac{Bl^2}{S\_d^2\, R\_ae} \tag{4}$$

On introduit le facteur de qualité Q_es

```
> R_ae := 1/(omega[s]*Q_es*C_as) ;
```

$$R\_ae := \frac{1}{\omega_s\, Q\_es\, C\_as} \tag{5}$$

On introduit le facteur de qualité Q_ms

```
> R_as := 1/(omega[s]*Q_ms*C_as) ;
```

$$R\_as := \frac{1}{\omega_s\, Q\_ms\, C\_as} \tag{6}$$

On introduit la pulsation de résonnance omega_s

```
> M2_as := 1/(omega[s]^2*C_as) ;
```

$$M2\_as := \frac{1}{\omega_s^2\, C\_as} \tag{7}$$

On introduit la variable de Laplace normalisée S = s / omega_s

```
> qd := simplify(subs(omega[s]=s/S,qd)) :
```

On introduit les inverses des facteurs de qualité

```
> Q_es := 1/Q1_es ;
```

$$Q\_es := \frac{1}{Q1\_es} \tag{8}$$

```
> Q_ms := 1/Q1_ms ;
```

(9)

$$Q\_ms := \frac{1}{Q1\_ms} \quad (9)$$

Expression du débit

```
> qd := simplify(qd) ;
```

$$qd := \frac{Ug\, S\_d\, S\, Q1\_es}{Bl\,(S\, Q1\_es + S\, Q1\_ms + S^2 + 1)} \quad (10)$$

Terme en facteur

```
> qs := Ug*S_d*Q1_es/Bl ;
```

$$qs := \frac{Ug\, S\_d\, Q1\_es}{Bl} \quad (11)$$

Fonction de transfert canonique

```
> Gs := S^2/(S^2+(Q1_ms+Q1_es)*S+1);;
```

$$Gs := \frac{S^2}{S^2 + (Q1\_ms + Q1\_es)\, S + 1} \quad (12)$$

Verification

```
> simplify(qd - qs*Gs/S);
```

$$0 \quad (13)$$

Calcul de l'élongation du diaphragme

```
> xi[d] := qd/(S*omega[s]*S_d) ;
```

$$\xi_d := \frac{Ug\, Q1\_es}{Bl\,(S\, Q1\_es + S\, Q1\_ms + S^2 + 1)\, \omega_s} \quad (14)$$

Terme en facteur

```
> xi[s] := Ug*Q1_es/(Bl*omega[s]) ;
```

$$\xi_s := \frac{Ug\, Q1\_es}{Bl\, \omega_s} \quad (15)$$

Verification

```
> simplify(xi[d]-xi[s]*Gs/S^2) ;
```

$$0 \quad (16)$$

Calcul de la puissance rayonnée

Expression de la resistance de rayonnement

```
> R_ar := 1/2*rho*S^2*omega[s]^2/c/Pi ;
```

$$R\_ar := \frac{1}{2}\, \frac{\rho\, S^2\, \omega_s^2}{c\, \pi} \quad (17)$$

Puissance rayonnée

```
> P_ar := R_ar * qd^2;
```

$$P\_ar := \frac{1}{2}\, \frac{\rho\, S^4\, \omega_s^2\, Ug^2\, S\_d^2\, Q1\_es^2}{c\, \pi\, Bl^2\,(S\, Q1\_es + S\, Q1\_ms + S^2 + 1)^2} \quad (18)$$

Terme en facteur de la puissance rayonnée

```
> Pas := R_ar*qs^2/S^2 ;
```

$$Pas := \frac{1}{2} \frac{\rho\, \omega_s^2\, Ug^2\, S\_d^2\, Q1\_es^2}{c\, \pi\, Bl^2} \quad (19)$$

Verification

```
> simplify(P_ar-Pas*Gs^2);
```

$$0 \quad (20)$$

Elongation en fonction de la puissance

```
> simplify(xi[s]^2/Pas) ;
```

$$\frac{2\, c\, \pi}{\omega_s^4\, \rho\, S\_d^2} \quad (21)$$

Autre forme du terme en facteur

```
> unassign('R_e') ;
> Q1_es := omega[s]*C_ms*Bl^2/R_e ;
```

$$Q1\_es := \frac{\omega_s\, C\_ms\, Bl^2}{R\_e} \quad (22)$$

```
> omega[s] := 1/sqrt(M2_ms*C_ms) ;
```

$$\omega_s := \frac{1}{\sqrt{M2\_ms\, C\_ms}} \quad (23)$$

```
> Pas :=simplify(Pas) ;
```

$$Pas := \frac{1}{2} \frac{\rho\, Ug^2\, S\_d^2\, Bl^2}{M2\_ms^2\, c\, \pi\, R\_e^2} \quad (24)$$

Calcul de l'impedance

```
> restart ;
> eq1 := Ug = R_e*i+U ;
```

$$eq1 := Ug = R\_e\, i + U \quad (25)$$

Première branche courant i1

```
> eq2 := U = 1/(s*C2_es)*i1 ;
```

$$eq2 := U = \frac{i1}{s\, C2\_es} \quad (26)$$

Deuxième branche courant i2

```
> eq3 := U = s*L_es*i2 ;
```

$$eq3 := U = s\, L\_es\, i2 \quad (27)$$

Troisième branche courant i3

```
> eq4 := U = R_es*i3 ;
```

$$eq4 := U = R\_es\, i3 \quad (28)$$

Courant total

```
> eq5 := i = i1+i2+i3 ;
```

$$eq5 := i = i1 + i2 + i3 \quad (29)$$

On résoud

```
> E := solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5},{U,i1,i2,i3,i}) :
> assign(E) ;
```

Calcul impédance

```
> Z := Ug/i ;
```

$$Z := \frac{R\_es\,R\_e + s^2\,L\_es\,R\_e\,R\_es\,C2\_es + s\,L\_es\,R\_e + s\,L\_es\,R\_es}{R\_es\,s^2\,L\_es\,C2\_es + R\_es + s\,L\_es} \tag{30}$$

On introduit le facteur de qualité Q_ms

```
> R_es := omega[s]*Q_ms*L_es ;
```

$$R\_es := \omega_s\,Q\_ms\,L\_es \tag{31}$$

On introduit la pulsation de résonnance omega_s

```
> C2_es := 1/(omega[s]^2*L_es) ;
```

$$C2\_es := \frac{1}{\omega_s^2\,L\_es} \tag{32}$$

On introduit le facteur de qualité Q_es

```
> L_es := R_e/(omega[s]*Q_es) ;
```

$$L\_es := \frac{R\_e}{\omega_s\,Q\_es} \tag{33}$$

On introduit la pulsation normalisée S = s / omega_s

```
> Z := simplify(subs(omega[s]=s/S,Z)) :
```

On introduit les inverses des facteurs de qualité

```
> Q_es := 1/Q1_es ;
```

$$Q\_es := \frac{1}{Q1\_es} \tag{34}$$

```
> Q_ms := 1/Q1_ms ;
```

$$Q\_ms := \frac{1}{Q1\_ms} \tag{35}$$

Evaluation de l'impédance

```
> Z := simplify(Z) ;
```

$$Z := \frac{R\_e\,(1 + S^2 + S\,Q1\_ms + S\,Q1\_es)}{S^2 + 1 + S\,Q1\_ms} \tag{36}$$

Impédance réduite

```
> Zr := Z/R_e;
```

$$Zr := \frac{1 + S^2 + S\,Q1\_ms + S\,Q1\_es}{S^2 + 1 + S\,Q1\_ms} \tag{37}$$

Etude de la phase de l'impédance

Calcul de la partie imaginaire de l'impédance

```
> ImZr := simplify(evalc(Im(subs(S=I*X,Zr)))) ;
```

(38)

$$ImZr := -\frac{X\left(X^2-1\right) Q1\_es}{X^4-2X^2+1+X^2 Q1\_ms^2} \quad \textbf{(38)}$$

Changement de variable dans le numérateur

```
> NumImZr := subs(X=sqrt(Y),numer(ImZr)) ;
```

$$NumImZr := -\sqrt{Y}\,(Y-1)\, Q1\_es \quad \textbf{(39)}$$

On cherche les zeros de la phase

```
> Eq1 := NumImZr = 0 ;
```

$$Eq1 := -\sqrt{Y}\,(Y-1)\, Q1\_es = 0 \quad \textbf{(40)}$$

```
> E := solve(Eq1,Y) ;
```

$$E := 0, 1 \quad \textbf{(41)}$$

Etude du module de l'impedance

On introduit le facteur de qualité total

```
> Zr := simplify(subs(Q1_es=Q1_ts-Q1_ms,Zr)) ;
```

$$Zr := \frac{1+S^2+S\, Q1\_ts}{S^2+1+S\, Q1\_ms} \quad \textbf{(42)}$$

Calcul de l'impédance complexe

```
> Zr := subs(S=I*X,Zr);
```

$$Zr := \frac{1-X^2+\mathrm{I}\, X\, Q1\_ts}{-X^2+1+\mathrm{I}\, X\, Q1\_ms} \quad \textbf{(43)}$$

Calcul du module de l'impédance et changement de variable

```
> AZr := simplify(subs(X=sqrt(Y),evalc(Zr*conjugate(Zr)))) ;
```

$$AZr := \frac{Y^2+Y\, Q1\_ts^2-2\,Y+1}{Y^2-2\,Y+1+Y\, Q1\_ms^2} \quad \textbf{(44)}$$

Calcul de Y tel que Z(y)=sqrt(z0) ;

```
> eq := AZr = Z0 ;
```

$$eq := \frac{Y^2+Y\, Q1\_ts^2-2\,Y+1}{Y^2-2\,Y+1+Y\, Q1\_ms^2} = Z0 \quad \textbf{(45)}$$

```
> h := solve(eq,Y) ;
```

$$h := \frac{1}{2}\,\frac{1}{-1+Z0}\Big(Q1\_ts^2+2\,Z0-2-Z0\, Q1\_ms^2 + \big(Q1\_ts^4+4\, Q1\_ts^2\, Z0-4\, Q1\_ts^2-2\, Q1\_ts^2\, Z0\, Q1\_ms^2-4\, Z0^2\, Q1\_ms^2 + 4\, Z0\, Q1\_ms^2+Z0^2\, Q1\_ms^4\big)^{1/2}\Big),\ -\frac{1}{2}\,\frac{1}{-1+Z0}\Big(-Q1\_ts^2-2\,Z0+2+Z0\, Q1\_ms^2 + \big(Q1\_ts^4+4\, Q1\_ts^2\, Z0-4\, Q1\_ts^2-2\, Q1\_ts^2\, Z0\, Q1\_ms^2-4\, Z0^2\, Q1\_ms^2 + 4\, Z0\, Q1\_ms^2+Z0^2\, Q1\_ms^4\big)^{1/2}\Big) \quad \textbf{(46)}$$

Vérification que X1*X2=1 soit Y1*Y2 =1 (Y1*Y2=((Y[1]+Y[2])^2-Y[1]^2-Y[2]^2)/2)

```
> simplify(((h[1]+h[2])^2-h[1]^2-h[2]^2)/2) ;
```

$$1 \tag{47}$$

Calcul de la dérivé pour obtenir l'impédance maximum

```
> eq := simplify(diff(AZr,Y)) = 0 ;
```

$$eq := \frac{Y^2\,Q1\_ms^2 - Y^2\,Q1\_ts^2 + Q1\_ts^2 - Q1\_ms^2}{\left(Y^2 - 2\,Y + 1 + Y\,Q1\_ms^2\right)^2} = 0 \tag{48}$$

```
> solve(eq,Y) ;
```

$$1,\ -1 \tag{49}$$

Calcul du module au carré de l'impédance max

```
> assume(Q1_ts>0,Q1_ms>0,Q1_ts>Q1_ms) ;
> Z0 := simplify(sqrt(subs(Y=1,AZr))) ;
```

$$Z0 := \frac{Q1\_ts\sim}{Q1\_ms\sim} \tag{50}$$

Calcul Q1_ms =sqrt(Z0)/(X2-X1) soit Q1_ms^2 = Z0/(Y[2]+Y[1]-2)

```
> simplify((h[1]+h[2]-2)/Z0) ;
```

$$Q1\_ms\sim^2 \tag{51}$$

Annexe E

Résultats Maple concernant l'enceinte à évent

Equations de l'enceinte à évent

```
> restart ;
```

Calcul des débits

M*ao noté M2ao

Equation du débit qd

```
> eq1 := Pg = (R_ae+R_as+s*M2_ao+1/(s*C_as))*qd+PB ;
```

$$eq1 := Pg = \left(R\_ae + R\_as + s\,M2\_ao + \frac{1}{s\,C\_as}\right) qd + PB \tag{1}$$

Equation du débit qb

```
> eq2 := PB = (R_ab+1/(s*C_ab))*qb ;
```

$$eq2 := PB = \left(R\_ab + \frac{1}{s\,C\_ab}\right) qb \tag{2}$$

Equation du débit ql

```
> eq3 := PB = -R_al*ql ;
```

$$eq3 := PB = -R\_al\,ql \tag{3}$$

Equation du débit qp

```
> eq4 := PB = -(R_ap+s*M2_ap)*qp ;
```

$$eq4 := PB = -\left(R\_ap + s\,M2\_ap\right) qp \tag{4}$$

Conservation du débit

```
> eq5 := qb = qd+ql+qp ;
```

$$eq5 := qb = qd + ql + qp \tag{5}$$

Resolution

```
> E := solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5},{PB,qb,qd,ql,qp}) :
> assign(E) ;
```

Calcul du débit dans l'enceinte

```
> qb:= simplify(qb) ;
```

$$\begin{aligned} qb := {} & \left(Pg\,s^2\,C\_as\,R\_al\,C\_ab\,(R\_ap + s\,M2\_ap)\right) \Big/ \left(R\_al\,s\,C\_ab\,R\_ap + R\_al\,s^2\,C\_ab\,M2\_ap\right. \\ & + R\_ab\,s\,C\_ab\,R\_ap + R\_ab\,s^2\,C\_ab\,M2\_ap + R\_al\,R\_ab\,s\,C\_ab + R\_al + R\_ap \\ & + s\,M2\_ap + s^3\,C\_as\,M2\_ap\,R\_al\,R\_ab\,C\_ab + R\_al\,R\_ab\,s^2\,C\_ab\,R\_ae\,C\_as \\ & + R\_al\,R\_ab\,s^2\,C\_ab\,R\_as\,C\_as + R\_al\,R\_ab\,s^3\,C\_ab\,M2\_ao\,C\_as \\ & + R\_al\,s^2\,C\_ab\,R\_ap\,R\_ae\,C\_as + R\_al\,s^2\,C\_ab\,R\_ap\,R\_as\,C\_as \\ & + R\_al\,s^3\,C\_ab\,R\_ap\,M2\_ao\,C\_as + R\_al\,s^3\,C\_ab\,M2\_ap\,R\_as\,C\_as \\ & + R\_al\,s^3\,C\_ab\,M2\_ap\,R\_ae\,C\_as + R\_al\,s^4\,C\_ab\,M2\_ap\,M2\_ao\,C\_as \\ & + R\_ab\,s^2\,C\_ab\,R\_ap\,R\_ae\,C\_as + R\_ab\,s^2\,C\_ab\,R\_ap\,R\_as\,C\_as \\ & + R\_ab\,s^3\,C\_ab\,R\_ap\,M2\_ao\,C\_as + R\_ab\,s^3\,C\_ab\,M2\_ap\,R\_ae\,C\_as \\ & + R\_ab\,s^3\,C\_ab\,M2\_ap\,R\_as\,C\_as + R\_ab\,s^4\,C\_ab\,M2\_ap\,M2\_ao\,C\_as \\ & + s^2\,C\_as\,R\_ap\,R\_al\,R\_ab\,C\_ab + s\,C\_as\,R\_ap\,R\_al + s^2\,C\_as\,M2\_ap\,R\_al \end{aligned} \tag{6}$$

$$+ R\_al\, R\_ae\, s\, C\_as + R\_al\, R\_as\, s\, C\_as + R\_al\, s^2\, M2\_ao\, C\_as + R\_ap\, R\_ae\, s\, C\_as + R\_ap\, R\_as\, s\, C\_as + R\_ap\, s^2\, M2\_ao\, C\_as + s^2\, M2\_ap\, R\_ae\, C\_as + s^2\, M2\_ap\, R\_as\, C\_as + s^3\, M2\_ap\, M2\_ao\, C\_as)$$

Valeur de la pression

```
> Pg := Bl*Ug/(S_d*R_e) ;
```

$$Pg := \frac{Bl\, Ug}{S\_d\, R\_e} \qquad (7)$$

Valeur de la résistance

```
> R_e := Bl^2/(S_d^2*R_ae) ;
```

$$R\_e := \frac{Bl^2}{S\_d^2\, R\_ae} \qquad (8)$$

On introduit le facteur de qualité Q_eo

```
> R_ae := 1/(omega[so]*Q_eo*C_as) ;
```

$$R\_ae := \frac{1}{\omega_{so}\, Q\_eo\, C\_as} \qquad (9)$$

On introduit le facteur de qualité Q_mo

```
> R_as := 1/(omega[so]*Q_mo*C_as) ;
```

$$R\_as := \frac{1}{\omega_{so}\, Q\_mo\, C\_as} \qquad (10)$$

On introduit la pulsation de résonnance omega_s

```
> M2_ao := 1/(omega[so]^2*C_as) ;
```

$$M2\_ao := \frac{1}{\omega_{so}^2\, C\_as} \qquad (11)$$

On introduit le facteur de qualité Q_a

```
> R_ab := 1/(h*omega[so]*Q_a*C_ab) ;
```

$$R\_ab := \frac{1}{h\, \omega_{so}\, Q\_a\, C\_ab} \qquad (12)$$

On introduit le facteur de qualité Q_p

```
> R_ap := 1/(h*omega[so]*Q_p*C_ab) ;
```

$$R\_ap := \frac{1}{h\, \omega_{so}\, Q\_p\, C\_ab} \qquad (13)$$

On intoduit le facteur de qualité Q_l

```
> R_al := Q_l/(h*omega[so]*C_ab) ;
```

$$R\_al := \frac{Q\_l}{h\, \omega_{so}\, C\_ab} \qquad (14)$$

On intoduit la pulsation de résonnance de l'évent

```
> M2_ap := 1/(h^2*omega[so]^2*C_ab) ;
```

(15)

$$M2\_ap := \frac{1}{h^2\,\omega_{so}^2\,C\_ab} \quad (15)$$

On introduit le facteur de compliance

```
> C_as := alpha*C_ab ;
```

$$C\_as := \alpha\,C\_ab \quad (16)$$

On introduit la pulsation normalisée S = s / omega_so

```
> qb := simplify(subs(omega[so]=s/S,qb)) :
```

On introduit les inverses des facteurs de qualité

```
> Q_eo := 1/Q1_eo ;
```

$$Q\_eo := \frac{1}{Q1\_eo} \quad (17)$$

```
> Q_mo := 1/Q1_mo ;
```

$$Q\_mo := \frac{1}{Q1\_mo} \quad (18)$$

```
> Q_a := 1/Q1_a ;
```

$$Q\_a := \frac{1}{Q1\_a} \quad (19)$$

```
> Q_p := 1/Q1_p ;
```

$$Q\_p := \frac{1}{Q1\_p} \quad (20)$$

```
> Q_l := 1/Q1_l ;
```

$$Q\_l := \frac{1}{Q1\_l} \quad (21)$$

Evaluation du débit

```
> qb := simplify(qb);
```

$$\begin{aligned} qb := {} & \left(Ug\,S\_d\,S^2\,(h\,Q1\_p + S)\,h\,Q1\_eo\right) \Big/ \Big(Bl\,\big(h^3 + S^4\,h + S^2\,h + S^2\,h^3 + \alpha\,S^2\,h + \alpha\,S^3\,Q1\_a \\ & + \alpha\,S^2\,h\,Q1\_p\,Q1\_a + S\,h^2\,Q1\_p + S\,h^2\,Q1\_a + S^3\,h^2\,Q1\_a + S^3\,h^2\,Q1\_p + S^3\,h\,Q1\_mo \\ & + S^3\,h\,Q1\_eo + S\,h^3\,Q1\_eo + S\,h^3\,Q1\_mo + S\,h^2\,Q1\_l + S^3\,h^2\,Q1\_l \\ & + S^3\,h\,Q1\_l\,Q1\_a\,Q1\_eo + S^3\,h^2\,Q1\_l\,Q1\_p\,Q1\_a + S\,h^3\,Q1\_l\,Q1\_p\,Q1\_mo \\ & + h^3\,Q1\_l\,Q1\_p + S\,h^2\,Q1\_l\,Q1\_p\,Q1\_a + S^4\,h\,Q1\_l\,Q1\_a + S^2\,h\,Q1\_l\,Q1\_a \\ & + S^2\,h^3\,Q1\_l\,Q1\_p + S^2\,h^2\,Q1\_l\,Q1\_eo + S^2\,h^2\,Q1\_l\,Q1\_mo + S^2\,h^2\,Q1\_a\,Q1\_eo \\ & + S^2\,h^2\,Q1\_a\,Q1\_mo + S^2\,h^2\,Q1\_p\,Q1\_eo + S^2\,h^2\,Q1\_p\,Q1\_mo \\ & + S^2\,h^2\,Q1\_l\,Q1\_p\,Q1\_a\,Q1\_eo + S^2\,h^2\,Q1\_l\,Q1\_p\,Q1\_a\,Q1\_mo \\ & + S^3\,h\,Q1\_l\,Q1\_a\,Q1\_mo + S\,h^3\,Q1\_l\,Q1\_p\,Q1\_eo + \alpha\,S\,h^2\,Q1\_p\big)\Big) \end{aligned} \quad (22)$$

Terme en facteur

```
> qo := Ug*S_d*Q1_eo/Bl /(1+Q1_a*Q1_l);
```

(23)

$$qo := \frac{Ug\, S\_d\, Q1\_eo}{Bl\,(1 + Q1\_a\, Q1\_l)} \tag{23}$$

Etude du dénominateur

```
> qb_denom := simplify(denom(qb/qo)) :
```

Terme constant

```
> X0 := simplify(subs(S=0,qb_denom)) ;
```

$$X0 := h^3 + h^3\, Q1\_l\, Q1\_p \tag{24}$$

```
> X0b := h^3*(1+Q1_l*Q1_p) ;
```

$$X0b := h^3\,(1 + Q1\_p\, Q1\_l) \tag{25}$$

```
> simplify(X0-X0b);
```

$$0 \tag{26}$$

Terme d'ordre 1

```
> X1 := simplify(coeff(qb_denom,S,1)) ;
```

$$X1 := h^3\, Q1\_mo + h^2\, Q1\_l + h^2\, Q1\_a + \alpha\, h^2\, Q1\_p + h^3\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_mo + h^2\, Q1\_p + h^3\, Q1\_eo + h^3\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_eo + h^2\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_a \tag{27}$$

```
> X1b := h^3*(factor(coeff(X1,h,3)))+h^2*(factor(coeff(X1,h,2)))+
  h*(factor(coeff(X1,h,1))) ;
```

$$X1b := h^3\,(1 + Q1\_p\, Q1\_l)\,(Q1\_mo + Q1\_eo) + h^2\,\left(Q1\_l + Q1\_a + \alpha\, Q1\_p + Q1\_p + Q1\_a\, Q1\_p\, Q1\_l\right) \tag{28}$$

```
> simplify(X1b-X1) ;
```

$$0 \tag{29}$$

Terme d'ordre 2

```
> X2 := simplify(coeff(qb_denom,S,2)) ;
```

$$X2 := h^3 + h^3\, Q1\_l\, Q1\_p + \alpha\, h + h\, Q1\_l\, Q1\_a + h + h^2\, Q1\_l\, Q1\_eo + h^2\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_eo + h^2\, Q1\_a\, Q1\_eo + \alpha\, h\, Q1\_p\, Q1\_a + h^2\, Q1\_p\, Q1\_eo + h^2\, Q1\_p\, Q1\_mo + h^2\, Q1\_l\, Q1\_mo + h^2\, Q1\_a\, Q1\_mo + h^2\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_mo \tag{30}$$

```
> X2b := h^3*(factor(coeff(X2,h,3)))+h^2*(factor(coeff(X2,h,2)))+
  h*(factor(coeff(X2,h,1))) ;
```

$$X2b := h^3\,(1 + Q1\_p\, Q1\_l) + h^2\,(Q1\_mo + Q1\_eo)\,(Q1\_l + Q1\_a\, Q1\_p\, Q1\_l + Q1\_a + Q1\_p) + h\,\left(\alpha + Q1\_a\, Q1\_l + 1 + \alpha\, Q1\_p\, Q1\_a\right) \tag{31}$$

```
> simplify(X2b-X2) ;
```

$$0 \tag{32}$$

Terme d'ordre 3

```
> X3 := simplify(coeff(qb_denom,S,3)) ;
```

$$X3 := h^2\, Q1\_p + h\, Q1\_eo + \alpha\, Q1\_a + h^2\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_a + h^2\, Q1\_l + h^2\, Q1\_a + h\, Q1\_mo + h\, Q1\_l\, Q1\_a\, Q1\_mo + h\, Q1\_l\, Q1\_a\, Q1\_eo \tag{33}$$

```
> X3b := h^3*(factor(coeff(X3,h,3)))+h^2*(factor(coeff(X3,h,2)))+
  h*(factor(coeff(X3,h,1)))+alpha*Q1_a ;
```

$$X3b := h^2\,(Q1\_l + Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l + Q1\_a + Q1\_p) + h\,(Q1\_mo + Q1\_eo)\,(1 + Q1\_a\,Q1\_l) + \alpha\,Q1\_a \tag{34}$$

```
> simplify(X3-X3b) ;
```

$$0 \tag{35}$$

Terme d'ordre 4

```
> X4 := simplify(coeff(qb_denom,S,4)) ;
```

$$X4 := h + h\,Q1\_l\,Q1\_a \tag{36}$$

```
> X4b := h*(1+Q1_l*Q1_a);
```

$$X4b := h\,(1 + Q1\_a\,Q1\_l) \tag{37}$$

```
> simplify(X4-X4b) ;
```

$$0 \tag{38}$$

Etude du numérateur

```
> qb_numer := numer(qb/qo) ;
```

$$qb\_numer := S^2\,(h\,Q1\_p + S)\,h\,(1 + Q1\_a\,Q1\_l) \tag{39}$$

```
> qb_numer2 := S^3*h*(1+Q1_a*Q1_l)+S^2*h^2*Q1_p*(1+Q1_a*Q1_l);
```

$$qb\_numer2 := S^3\,h\,(1 + Q1\_a\,Q1\_l) + S^2\,h^2\,Q1\_p\,(1 + Q1\_a\,Q1\_l) \tag{40}$$

```
> simplify(qb_numer-qb_numer2);
```

$$0 \tag{41}$$

Fonction de transfert

```
> Go := S*qb_numer2/(X4b*S^4+X3b*S^3+X2b*S^2+X1b*S+X0) ;
```

$$Go := \Big(S\,\big(S^3\,h\,(1 + Q1\_a\,Q1\_l) + S^2\,h^2\,Q1\_p\,(1 + Q1\_a\,Q1\_l)\big)\Big) \Big/ \Big(h\,(1 + Q1\_a\,Q1\_l)\,S^4 + \big(h^2\,(Q1\_l + Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l + Q1\_a + Q1\_p) + h\,(Q1\_mo + Q1\_eo)\,(1 + Q1\_a\,Q1\_l) + \alpha\,Q1\_a\big)\,S^3 + \big(h^3\,(1 + Q1\_p\,Q1\_l) + h^2\,(Q1\_mo + Q1\_eo)\,(Q1\_l + Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l + Q1\_a + Q1\_p) + h\,(\alpha + Q1\_a\,Q1\_l + 1 + \alpha\,Q1\_p\,Q1\_a)\big)\,S^2 + \big(h^3\,(1 + Q1\_p\,Q1\_l)\,(Q1\_mo + Q1\_eo) + h^2\,(Q1\_l + Q1\_a + \alpha\,Q1\_p + Q1\_p + Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l)\big)\,S + h^3 + h^3\,Q1\_l\,Q1\_p\Big) \tag{42}$$

Vérification

```
> simplify(qb - qo*Go/S) ;
```

$$0 \tag{43}$$

Cas où on néglige Q1_a et Q1_p

```
> G1 := subs(Q1_a=0,Q1_p=0,Go) ;
```

$$G1 := \big(S^4\,h\big) \Big/ \Big(S^4\,h + \big(h^2\,Q1\_l + h\,(Q1\_mo + Q1\_eo)\big)\,S^3 + \big(h^3 + h^2\,(Q1\_mo + Q1\_eo)\,Q1\_l + h\,(\alpha + 1)\big)\,S^2 + \big(h^3\,(Q1\_mo + Q1\_eo) + h^2\,Q1\_l\big)\,S + h^3\Big) \tag{44}$$

Cas où on néglige de plus Q1_l

```
> G2 := subs(Q1_l=0,G1) ;
```

$$G2 := \frac{S^4\, h}{S^4\, h + h\, (Q1\_mo + Q1\_eo)\, S^3 + \left(h^3 + h\, (\alpha + 1)\right) S^2 + h^3\, (Q1\_mo + Q1\_eo)\, S + h^3} \tag{45}$$

Calcul de l'élongation du diaphragme

On introduit la pulsation normalisée S = s / omega_so

```
> qd := simplify(subs(omega[so]=s/S,qd)) ;
```

$$\begin{aligned} qd := {} & \big(Ug\, S\_d\, S\, Q1\_eo\, (S\, h\, Q1\_a + h^2 + S\, Q1\_p\, h + S^2 + S\, Q1\_a\, Q1\_p\, Q1\_l\, h \\ & + S^2\, Q1\_l\, Q1\_a + h^2\, Q1\_l\, Q1\_p + S\, h\, Q1\_l)\, h\big) \Big/ \big(Bl\, (h^3 + S^4\, h + S^2\, h + S^2\, h^3 + \alpha\, S^2\, h \\ & + \alpha\, S^3\, Q1\_a + \alpha\, S^2\, h\, Q1\_p\, Q1\_a + S\, h^2\, Q1\_p + S\, h^2\, Q1\_a + S^3\, h^2\, Q1\_a + S^3\, h^2\, Q1\_p \\ & + S^3\, h\, Q1\_mo + S^3\, h\, Q1\_eo + S\, h^3\, Q1\_eo + S\, h^3\, Q1\_mo + S\, h^2\, Q1\_l + S^3\, h^2\, Q1\_l \\ & + S^3\, h\, Q1\_l\, Q1\_a\, Q1\_eo + S^3\, h^2\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_a + S\, h^3\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_mo \\ & + h^3\, Q1\_l\, Q1\_p + S\, h^2\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_a + S^4\, h\, Q1\_l\, Q1\_a + S^2\, h\, Q1\_l\, Q1\_a \\ & + S^2\, h^3\, Q1\_l\, Q1\_p + S^2\, h^2\, Q1\_l\, Q1\_eo + S^2\, h^2\, Q1\_l\, Q1\_mo + S^2\, h^2\, Q1\_a\, Q1\_eo \\ & + S^2\, h^2\, Q1\_a\, Q1\_mo + S^2\, h^2\, Q1\_p\, Q1\_eo + S^2\, h^2\, Q1\_p\, Q1\_mo \\ & + S^2\, h^2\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_eo + S^2\, h^2\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_mo \\ & + S^3\, h\, Q1\_l\, Q1\_a\, Q1\_mo + S\, h^3\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_eo + \alpha\, S\, h^2\, Q1\_p)\big) \end{aligned} \tag{46}$$

Elongation du diaphragme

```
> xi[d] := simplify(qd/(S*omega[so]*S_d)) ;
```

$$\begin{aligned} \xi_d := {} & \big(Ug\, Q1\_eo\, (S\, h\, Q1\_a + h^2 + S\, Q1\_p\, h + S^2 + S\, Q1\_a\, Q1\_p\, Q1\_l\, h + S^2\, Q1\_l\, Q1\_a \\ & + h^2\, Q1\_l\, Q1\_p + S\, h\, Q1\_l)\, h\big) \Big/ \big(Bl\, (h^3 + S^4\, h + S^2\, h + S^2\, h^3 + \alpha\, S^2\, h + \alpha\, S^3\, Q1\_a \\ & + \alpha\, S^2\, h\, Q1\_p\, Q1\_a + S\, h^2\, Q1\_p + S\, h^2\, Q1\_a + S^3\, h^2\, Q1\_a + S^3\, h^2\, Q1\_p + S^3\, h\, Q1\_mo \\ & + S^3\, h\, Q1\_eo + S\, h^3\, Q1\_eo + S\, h^3\, Q1\_mo + S\, h^2\, Q1\_l + S^3\, h^2\, Q1\_l \\ & + S^3\, h\, Q1\_l\, Q1\_a\, Q1\_eo + S^3\, h^2\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_a + S\, h^3\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_mo \\ & + h^3\, Q1\_l\, Q1\_p + S\, h^2\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_a + S^4\, h\, Q1\_l\, Q1\_a + S^2\, h\, Q1\_l\, Q1\_a \\ & + S^2\, h^3\, Q1\_l\, Q1\_p + S^2\, h^2\, Q1\_l\, Q1\_eo + S^2\, h^2\, Q1\_l\, Q1\_mo + S^2\, h^2\, Q1\_a\, Q1\_eo \\ & + S^2\, h^2\, Q1\_a\, Q1\_mo + S^2\, h^2\, Q1\_p\, Q1\_eo + S^2\, h^2\, Q1\_p\, Q1\_mo \\ & + S^2\, h^2\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_eo + S^2\, h^2\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_mo \\ & + S^3\, h\, Q1\_l\, Q1\_a\, Q1\_mo + S\, h^3\, Q1\_l\, Q1\_p\, Q1\_eo + \alpha\, S\, h^2\, Q1\_p)\, \omega_{so}\big) \end{aligned} \tag{47}$$

```
> xid :=simplify(xi[d]/Go);
```

(48)

$$xid := \frac{1}{(1+Q1\_a\,Q1\_l)\,(h\,Q1\_p+S)\,S^3\,\omega_{so}\,Bl}\big(Ug\,Q1\_eo\,(S\,h\,Q1\_a+h^2+S\,Q1\_p\,h+S^2 + S\,Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l\,h+S^2\,Q1\_l\,Q1\_a+h^2\,Q1\_l\,Q1\_p+S\,h\,Q1\_l)\big) \quad (48)$$

Terme en facteur

```
> xi[o] := Ug*Q1_eo/(Bl*omega[so]*(1+Q1_a*Q1_l)) ;
```

$$\xi_o := \frac{Ug\,Q1\_eo}{Bl\,\omega_{so}\,(1+Q1\_a\,Q1\_l)} \quad (49)$$

Terme en facteur de la fonction de transfert Go

```
> xid := xid/xi[o];
```

$$xid := \frac{1}{(h\,Q1\_p+S)\,S^3}\big(S\,h\,Q1\_a+h^2+S\,Q1\_p\,h+S^2+S\,Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l\,h + S^2\,Q1\_l\,Q1\_a+h^2\,Q1\_l\,Q1\_p+S\,h\,Q1\_l\big) \quad (50)$$

Verification

```
> simplify(xi[d]-xi[o]*xid*Go) ;
```

$$0 \quad (51)$$

Calcul de la puissance rayonnée

Expression de la resistance de rayonnement

```
> R_ar := 1/2*rho*S^2*omega[so]^2/c/Pi ;
```

$$R\_ar := \frac{1}{2}\,\frac{\rho\,S^2\,\omega_{so}^2}{c\,\pi} \quad (52)$$

Puissance rayonnée

```
> P_ar := R_ar * qb^2;
```

$$P\_ar := \frac{1}{2}\left(\rho\,S^6\,\omega_{so}^2\,Ug^2\,S\_d^2\,(h\,Q1\_p+S)^2\,h^2\,Q1\_eo^2\right)\Big/\Big(c\,\pi\,Bl^2\,\big(h^3+S^4\,h+S^2\,h+S^2\,h^3 + \alpha\,S^2\,h+\alpha\,S^3\,Q1\_a+\alpha\,S^2\,h\,Q1\_p\,Q1\_a+S\,h^2\,Q1\_p+S\,h^2\,Q1\_a+S^3\,h^2\,Q1\_a + S^3\,h^2\,Q1\_p+S^3\,h\,Q1\_mo+S^3\,h\,Q1\_eo+S\,h^3\,Q1\_eo+S\,h^3\,Q1\_mo+S\,h^2\,Q1\_l + S^3\,h^2\,Q1\_l+S^3\,h\,Q1\_l\,Q1\_a\,Q1\_eo+S^3\,h^2\,Q1\_l\,Q1\_p\,Q1\_a+S\,h^3\,Q1\_l\,Q1\_p\,Q1\_mo + h^3\,Q1\_l\,Q1\_p+S\,h^2\,Q1\_l\,Q1\_p\,Q1\_a+S^4\,h\,Q1\_l\,Q1\_a+S^2\,h\,Q1\_l\,Q1\_a + S^2\,h^3\,Q1\_l\,Q1\_p+S^2\,h^2\,Q1\_l\,Q1\_eo+S^2\,h^2\,Q1\_l\,Q1\_mo+S^2\,h^2\,Q1\_a\,Q1\_eo + S^2\,h^2\,Q1\_a\,Q1\_mo+S^2\,h^2\,Q1\_p\,Q1\_eo+S^2\,h^2\,Q1\_p\,Q1\_mo + S^2\,h^2\,Q1\_l\,Q1\_p\,Q1\_a\,Q1\_eo+S^2\,h^2\,Q1\_l\,Q1\_p\,Q1\_a\,Q1\_mo + S^3\,h\,Q1\_l\,Q1\_a\,Q1\_mo+S\,h^3\,Q1\_l\,Q1\_p\,Q1\_eo+\alpha\,S\,h^2\,Q1\_p\big)^2\Big) \quad (53)$$

Terme en facteur de la puissance rayonnée

```
> Pao := R_ar*qo^2/S^2 ;
```

$$Pao := \frac{1}{2} \frac{\rho\, \omega_{so}^2\, Ug^2\, S\_d^2\, Q1\_eo^2}{c\, \pi\, Bl^2\, (1 + Q1\_a\, Q1\_l)^2} \quad (54)$$

Verification

```
> simplify(P_ar-Pao*Go^2);
```

$$0 \quad (55)$$

Autre forme du terme en facteur

```
> unassign('R_e','M2_ao','R_ae','C_as') ;
> Q1_eo := omega[so]*C_as*R_ae ;
```

$$Q1\_eo := \omega_{so}\, C\_as\, R\_ae \quad (56)$$

```
> R_ae := Bl^2/(S_d^2*R_e) ;
```

$$R\_ae := \frac{Bl^2}{S\_d^2\, R\_e} \quad (57)$$

```
> omega[so] := 1/sqrt(M2_ao*C_as) ;
```

$$\omega_{so} := \frac{1}{\sqrt{M2\_ao\, C\_as}} \quad (58)$$

```
> M2_ao := M2_ms/q/S_d^2;
```

$$M2\_ao := \frac{M2\_ms}{q\, S\_d^2} \quad (59)$$

```
> Pao :=simplify(Pao) ;
```

$$Pao := \frac{1}{2} \frac{\rho\, q^2\, S\_d^2\, Ug^2\, Bl^2}{M2\_ms^2\, c\, \pi\, R\_e^2\, (1 + Q1\_a\, Q1\_l)^2} \quad (60)$$

Calcul de l'impedance

```
> restart ;
> eq1 := Ug = R_e*i+U ;
```

$$eq1 := Ug = R\_e\, i + U \quad (61)$$

Première branche courant i1 (C'es noté C2es)

```
> eq2 := U = 1/(s*C2_eo)*i1 ;
```

$$eq2 := U = \frac{i1}{s\, C2\_eo} \quad (62)$$

Deuxième branche courant i2

```
> eq3 := U = s*L_es*i2 ;
```

$$eq3 := U = s\, L\_es\, i2 \quad (63)$$

Troisième branche courant i3

```
> eq4 := U = R_es*i3 ;
```

$$eq4 := U = R\_es\, i3 \quad (64)$$

Quatrième branche courant i4

```
> eq5 := U = (R_el+1/(1/(s*L_eb)+1/R_eb)+1/(s*C2_ep+1/R_ep))*i4 ;
```

(65)

$$eq5 := U = \left(R\_el + \frac{1}{\frac{1}{s\,L\_eb} + \frac{1}{R\_eb}} + \frac{1}{s\,C2\_ep + \frac{1}{R\_ep}}\right) i4 \quad (65)$$

Courant total

```
> eq6 := i = i1+i2+i3+i4 ;
```

$$eq6 := i = i1 + i2 + i3 + i4 \quad (66)$$

On résoud

```
> E := solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6},{U,i1,i2,i3,i4,i}) :
> assign(E) ;
```

Calcul impédance

```
> Z := Ug/i ;
```

$$Z := \big(R\_el\,R\_eb\,R\_es\,R\_e + R\_ep\,R\_eb\,R\_es\,R\_e + R\_es\,R\_e\,s\,L\_es\,R\_eb \quad (67)$$
$$+ R\_es\,R\_e\,s^2\,L\_es\,L\_eb + R\_el\,R\_eb\,s\,L\_es\,R\_e + R\_el\,R\_eb\,s\,L\_es\,R\_es$$
$$+ R\_el\,s^2\,L\_eb\,L\_es\,R\_e + R\_el\,s\,L\_eb\,R\_es\,R\_e + R\_el\,s^2\,L\_eb\,L\_es\,R\_es$$
$$+ s\,L\_eb\,R\_eb\,R\_es\,R\_e + s^2\,L\_eb\,R\_eb\,L\_es\,R\_e + s^2\,L\_eb\,R\_eb\,L\_es\,R\_es$$
$$+ R\_ep\,R\_eb\,s\,L\_es\,R\_e + R\_ep\,R\_eb\,s\,L\_es\,R\_es + R\_ep\,s\,L\_eb\,R\_es\,R\_e$$
$$+ R\_ep\,s^2\,L\_eb\,L\_es\,R\_e + R\_ep\,s^2\,L\_eb\,L\_es\,R\_es + R\_es\,R\_e\,s^2\,L\_es\,R\_eb\,C2\_ep\,R\_ep$$
$$+ R\_es\,R\_e\,s^3\,L\_es\,L\_eb\,C2\_ep\,R\_ep + R\_el\,s^2\,L\_eb\,C2\_ep\,R\_ep\,R\_es\,R\_e$$
$$+ R\_el\,s^4\,L\_eb\,C2\_ep\,R\_ep\,L\_es\,R\_e\,R\_es\,C2\_eo + R\_el\,R\_eb\,s\,C2\_ep\,R\_ep\,R\_es\,R\_e$$
$$+ R\_el\,R\_eb\,s^3\,C2\_ep\,R\_ep\,L\_es\,R\_e\,R\_es\,C2\_eo + R\_el\,R\_eb\,s^2\,C2\_ep\,R\_ep\,L\_es\,R\_e$$
$$+ R\_el\,R\_eb\,s^2\,C2\_ep\,R\_ep\,L\_es\,R\_es + R\_el\,R\_eb\,s^2\,L\_es\,R\_e\,R\_es\,C2\_eo$$
$$+ R\_ep\,R\_eb\,s^2\,L\_es\,R\_e\,R\_es\,C2\_eo + R\_ep\,s^3\,L\_eb\,L\_es\,R\_e\,R\_es\,C2\_eo$$
$$+ R\_el\,s^3\,L\_eb\,C2\_ep\,R\_ep\,L\_es\,R\_e + R\_el\,s^3\,L\_eb\,C2\_ep\,R\_ep\,L\_es\,R\_es$$
$$+ R\_el\,s^3\,L\_eb\,L\_es\,R\_e\,R\_es\,C2\_eo + s^2\,L\_eb\,R\_eb\,C2\_ep\,R\_ep\,R\_es\,R\_e$$
$$+ s^4\,L\_eb\,R\_eb\,C2\_ep\,R\_ep\,L\_es\,R\_e\,R\_es\,C2\_eo + s^3\,L\_eb\,R\_eb\,C2\_ep\,R\_ep\,L\_es\,R\_e$$
$$+ s^3\,L\_eb\,R\_eb\,C2\_ep\,R\_ep\,L\_es\,R\_es + s^3\,L\_eb\,R\_eb\,L\_es\,R\_e\,R\_es\,C2\_eo\big) \Big/$$
$$\big(R\_es\,s^2\,L\_es\,R\_eb\,C2\_ep\,R\_ep + R\_es\,s^3\,L\_es\,L\_eb\,C2\_ep\,R\_ep$$
$$+ R\_el\,R\_eb\,s^2\,C2\_ep\,R\_ep\,L\_es + R\_el\,R\_eb\,s^2\,L\_es\,R\_es\,C2\_eo$$
$$+ R\_ep\,R\_eb\,s^2\,L\_es\,R\_es\,C2\_eo + R\_ep\,s^3\,L\_eb\,L\_es\,R\_es\,C2\_eo$$
$$+ R\_el\,s^3\,L\_eb\,C2\_ep\,R\_ep\,L\_es + R\_el\,s^3\,L\_eb\,L\_es\,R\_es\,C2\_eo$$
$$+ s^3\,L\_eb\,R\_eb\,C2\_ep\,R\_ep\,L\_es + s^3\,L\_eb\,R\_eb\,L\_es\,R\_es\,C2\_eo + R\_el\,R\_eb\,R\_es$$
$$+ R\_ep\,R\_eb\,R\_es + R\_es\,s\,L\_es\,R\_eb + R\_es\,s^2\,L\_es\,L\_eb + R\_el\,R\_eb\,s\,L\_es$$
$$+ R\_el\,s^2\,L\_eb\,L\_es + s^2\,L\_eb\,R\_eb\,L\_es + R\_ep\,R\_eb\,s\,L\_es + R\_ep\,s^2\,L\_eb\,L\_es$$
$$+ R\_el\,s\,L\_eb\,R\_es + s\,L\_eb\,R\_eb\,R\_es + R\_ep\,s\,L\_eb\,R\_es$$

$$+ R\_el\, s^2\, L\_eb\, C2\_ep\, R\_ep\, R\_es + s^2\, L\_eb\, R\_eb\, C2\_ep\, R\_ep\, R\_es$$
$$+ R\_el\, R\_eb\, s\, C2\_ep\, R\_ep\, R\_es + R\_el\, s^4\, L\_eb\, C2\_ep\, R\_ep\, L\_es\, R\_es\, C2\_eo$$
$$+ R\_el\, R\_eb\, s^3\, C2\_ep\, R\_ep\, L\_es\, R\_es\, C2\_eo$$
$$+ s^4\, L\_eb\, R\_eb\, C2\_ep\, R\_ep\, L\_es\, R\_es\, C2\_eo)$$

On introduit le facteur de qualité mécanique Q_mo

```
> R_es := omega[so]*Q_mo*L_es ;
```

$$R\_es := \omega_{so}\, Q\_mo\, L\_es \tag{68}$$

On introduit la pulsation de résonnance omega_so

```
> C2_eo := 1/(omega[so]^2*L_es) ;
```

$$C2\_eo := \frac{1}{\omega_{so}^2\, L\_es} \tag{69}$$

On introduit le facteur de qualité Q_eo

```
> L_es := R_e/(omega[so]*Q_eo) ;
```

$$L\_es := \frac{R\_e}{\omega_{so}\, Q\_eo} \tag{70}$$

On intoduit la pulsation de résonnance de l'évent h*omega_s

```
> C2_ep := 1/(h^2*omega[so]^2*L_eb) ;
```

$$C2\_ep := \frac{1}{h^2\, \omega_{so}^2\, L\_eb} \tag{71}$$

On introduit Q_a

```
> R_eb := h*omega[so]*Q_a*L_eb ;
```

$$R\_eb := h\, \omega_{so}\, Q\_a\, L\_eb \tag{72}$$

On introduit Q_p

```
> R_ep := h*omega[so]*Q_p*L_eb ;
```

$$R\_ep := h\, \omega_{so}\, Q\_p\, L\_eb \tag{73}$$

On intoduit Q_l

```
> R_el := (h*omega[so]*L_eb)/Q_l ;
```

$$R\_el := \frac{h\, \omega_{so}\, L\_eb}{Q\_l} \tag{74}$$

On introduit le facteur de compliance

```
> L_eb := L_es / alpha ;
```

$$L\_eb := \frac{R\_e}{\omega_{so}\, Q\_eo\, \alpha} \tag{75}$$

On introduit la pulsation normalisée (S = s / omega_so)

```
> Z := simplify(subs(omega[so]=s/S,Z)) :
```

On introduit les inverses des facteurs de qualité

```
> Q_eo := 1/Q1_eo ;
```

$$Q\_eo := \frac{1}{Q1\_eo} \tag{76}$$

```
> Q_mo := 1/Q1_mo ;
```

$$Q\_mo := \frac{1}{Q1\_mo} \tag{77}$$

```
> Q_a := 1/Q1_a ;
```

$$Q\_a := \frac{1}{Q1\_a} \tag{78}$$

```
> Q_p := 1/Q1_p ;
```

$$Q\_p := \frac{1}{Q1\_p} \tag{79}$$

```
> Q_l := 1/Q1_l ;
```

$$Q\_l := \frac{1}{Q1\_l} \tag{80}$$

Simplification de l'impédance

```
> Z := simplify(Z) ;
```

$$\begin{aligned} Z := \big(&R\_e\,\big(h^3 S^2 + S^2 h + S^4 h + h^3 + S^2 \alpha h + S h^2 \alpha\, Q1\_p + h^2 S^2\, Q1\_p\, Q1\_mo \\ &+ h^2 S^2\, Q1\_p\, Q1\_eo + h^2 S^2\, Q1\_a\, Q1\_mo + h^2 S^2\, Q1\_a\, Q1\_eo + S^2 h\, Q1\_a\, Q1\_l \\ &+ S^4 h\, Q1\_a\, Q1\_l + h^2 S^2\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^3 S^2\, Q1\_p\, Q1\_l + h^2 S^2\, Q1\_eo\, Q1\_l \\ &+ S^2 \alpha h\, Q1\_p\, Q1\_a + h^2 S\, Q1\_p + h^3 S\, Q1\_mo + h^3 S\, Q1\_eo + h^2 S\, Q1\_a + S^3 \alpha\, Q1\_a \\ &+ h^2 S\, Q1\_l + h^2 S^3\, Q1\_l + h^2 S^3\, Q1\_a + S^3 h\, Q1\_mo + S^3 h\, Q1\_eo + h^2 S^3\, Q1\_p \\ &+ h^2 S^2\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^2 S^2\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_eo\, Q1\_l + h^3\, Q1\_p\, Q1\_l \\ &+ h^3 S\, Q1\_p\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^3 S\, Q1\_p\, Q1\_eo\, Q1\_l + h^2 S\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_l \\ &+ S^3 h\, Q1\_a\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^2 S^3\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_l + S^3 h\, Q1\_a\, Q1\_eo\, Q1\_l\big)\big) \Big/ \big(h^3 S^2 \\ &+ S^2 h + S^4 h + h^3 + S^2 \alpha h + S h^2 \alpha\, Q1\_p + h^2 S^2\, Q1\_p\, Q1\_mo + h^2 S^2\, Q1\_a\, Q1\_mo \\ &+ S^2 h\, Q1\_a\, Q1\_l + S^4 h\, Q1\_a\, Q1\_l + h^2 S^2\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^3 S^2\, Q1\_p\, Q1\_l \\ &+ S^2 \alpha h\, Q1\_p\, Q1\_a + h^2 S\, Q1\_p + h^3 S\, Q1\_mo + h^2 S\, Q1\_a + S^3 \alpha\, Q1\_a + h^2 S\, Q1\_l \\ &+ h^2 S^3\, Q1\_l + h^2 S^3\, Q1\_a + S^3 h\, Q1\_mo + h^2 S^3\, Q1\_p + h^2 S^2\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_mo\, Q1\_l \\ &+ h^3\, Q1\_p\, Q1\_l + h^3 S\, Q1\_p\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^2 S\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_l \\ &+ S^3 h\, Q1\_a\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^2 S^3\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_l\big) \end{aligned} \tag{81}$$

Impédance réduite

```
> Zr := Z / R_e;
```

$$Zr := \big(h^3 S^2 + S^2 h + S^4 h + h^3 + S^2 \alpha h + S h^2 \alpha\, Q1\_p + h^2 S^2\, Q1\_p\, Q1\_mo \tag{82}$$

$$+ h^2 S^2 Q1\_p\, Q1\_eo + h^2 S^2 Q1\_a\, Q1\_mo + h^2 S^2 Q1\_a\, Q1\_eo + S^2 h\, Q1\_a\, Q1\_l$$
$$+ S^4 h\, Q1\_a\, Q1\_l + h^2 S^2 Q1\_mo\, Q1\_l + h^3 S^2 Q1\_p\, Q1\_l + h^2 S^2 Q1\_eo\, Q1\_l$$
$$+ S^2 \alpha h\, Q1\_p\, Q1\_a + h^2 S\, Q1\_p + h^3 S\, Q1\_mo + h^3 S\, Q1\_eo + h^2 S\, Q1\_a + S^3 \alpha\, Q1\_a$$
$$+ h^2 S\, Q1\_l + h^2 S^3 Q1\_l + h^2 S^3 Q1\_a + S^3 h\, Q1\_mo + S^3 h\, Q1\_eo + h^2 S^3 Q1\_p$$
$$+ h^2 S^2 Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^2 S^2 Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_eo\, Q1\_l + h^3 Q1\_p\, Q1\_l$$
$$+ h^3 S\, Q1\_p\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^3 S\, Q1\_p\, Q1\_eo\, Q1\_l + h^2 S\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_l$$
$$+ S^3 h\, Q1\_a\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^2 S^3 Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_l + S^3 h\, Q1\_a\, Q1\_eo\, Q1\_l\big) \Big/ \big(h^3 S^2$$
$$+ S^2 h + S^4 h + h^3 + S^2 \alpha h + S h^2 \alpha\, Q1\_p + h^2 S^2 Q1\_p\, Q1\_mo + h^2 S^2 Q1\_a\, Q1\_mo$$
$$+ S^2 h\, Q1\_a\, Q1\_l + S^4 h\, Q1\_a\, Q1\_l + h^2 S^2 Q1\_mo\, Q1\_l + h^3 S^2 Q1\_p\, Q1\_l$$
$$+ S^2 \alpha h\, Q1\_p\, Q1\_a + h^2 S\, Q1\_p + h^3 S\, Q1\_mo + h^2 S\, Q1\_a + S^3 \alpha\, Q1\_a + h^2 S\, Q1\_l$$
$$+ h^2 S^3 Q1\_l + h^2 S^3 Q1\_a + S^3 h\, Q1\_mo + h^2 S^3 Q1\_p + h^2 S^2 Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_mo\, Q1\_l$$
$$+ h^3 Q1\_p\, Q1\_l + h^3 S\, Q1\_p\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^2 S\, Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_l$$
$$+ S^3 h\, Q1\_a\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^2 S^3 Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_l\big)$$

Etude du dénominateur

```
> Zr_denom := simplify(denom(Zr)) :
```

Terme constant

```
> X0 := simplify(subs(S=0,Zr_denom)) ;
```

$$X0 := h^3 Q1\_p\, Q1\_l + h^3 \tag{83}$$

Terme d'ordre 1

```
> X1 := simplify(coeff(Zr_denom,S,1)) ;
```

$$X1 := h^2 Q1\_p + h^3 Q1\_mo + h^2 Q1\_l + h^2 \alpha\, Q1\_p + h^2 Q1\_a + h^3 Q1\_p\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^2 Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_l \tag{84}$$

```
> X1b := h^3*(factor(coeff(X1,h,3)))+h^2*(factor(coeff(X1,h,2)))+
   h*(factor(coeff(X1,h,1)));
```

$$X1b := h^3 Q1\_mo\, (1 + Q1\_p\, Q1\_l) + h^2 \big(Q1\_p + Q1\_l + \alpha\, Q1\_p + Q1\_a + Q1\_a\, Q1\_p\, Q1\_l\big) \tag{85}$$

```
> simplify(X1-X1b);
```

$$0 \tag{86}$$

Terme d'ordre 2

```
> X2 := simplify(coeff(Zr_denom,S,2)) ;
```

$$X2 := h^2 Q1\_p\, Q1\_a\, Q1\_mo\, Q1\_l + h^2 Q1\_p\, Q1\_mo + h^2 Q1\_a\, Q1\_mo + h\, Q1\_a\, Q1\_l + h^3 + h + h^2 Q1\_mo\, Q1\_l + h^3 Q1\_p\, Q1\_l + \alpha h + \alpha h\, Q1\_p\, Q1\_a \tag{87}$$

```
> X2b := h^3*(factor(coeff(X2,h,3)))+h^2*(factor(coeff(X2,h,2)))+
```

```
h*(factor(coeff(X2,h,1)));
```
$$X2b := h^3\,(1 + Q1\_p\,Q1\_l) + h^2\,Q1\_mo\,(Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l + Q1\_p + Q1\_a + Q1\_l) + h\,\left(Q1\_a\,Q1\_l + 1 + \alpha + \alpha\,Q1\_p\,Q1\_a\right) \tag{88}$$

```
> simplify(X2-X2b);
```
$$0 \tag{89}$$

Terme d'ordre 3

```
> X3 := simplify(coeff(Zr_denom,S,3)) ;
```
$$X3 := h^2\,Q1\_l + h^2\,Q1\_a + \alpha\,Q1\_a + h\,Q1\_a\,Q1\_mo\,Q1\_l + h^2\,Q1\_p\,Q1\_a\,Q1\_l + h\,Q1\_mo + h^2\,Q1\_p \tag{90}$$

```
> X3b := h^3*(factor(coeff(X3,h,3)))+h^2*(factor(coeff(X3,h,2)))+
  h*(factor(coeff(X3,h,1)))+alpha*Q1_a;
```
$$X3b := h^2\,(Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l + Q1\_p + Q1\_a + Q1\_l) + h\,Q1\_mo\,(Q1\_a\,Q1\_l + 1) + \alpha\,Q1\_a \tag{91}$$

```
> simplify(X3-X3b);
```
$$0 \tag{92}$$

Terme d'ordre 4

```
> X4 := simplify(coeff(Zr_denom,S,4)) ;
```
$$X4 := h\,Q1\_a\,Q1\_l + h \tag{93}$$

Etude du numerateur

```
> Zr_numer := simplify(numer(Zr)) :
```

Terme constant

```
> Y0 := simplify(subs(S=0,Zr_numer)) ;
```
$$Y0 := h^3\,Q1\_p\,Q1\_l + h^3 \tag{94}$$

Terme d'ordre 1

```
> Y1 := simplify(coeff(Zr_numer,S,1)) ;
```
$$Y1 := h^2\,\alpha\,Q1\_p + h^2\,Q1\_a + h^3\,Q1\_mo + h^3\,Q1\_p\,Q1\_mo\,Q1\_l + h^3\,Q1\_eo + h^2\,Q1\_p\,Q1\_a\,Q1\_l + h^2\,Q1\_l + h^2\,Q1\_p + h^3\,Q1\_p\,Q1\_eo\,Q1\_l \tag{95}$$

```
> Y1b := h^3*(factor(coeff(Y1,h,3)))+h^2*(factor(coeff(Y1,h,2)))+
  h*(factor(coeff(Y1,h,1)));
```
$$Y1b := h^3\,(1 + Q1\_p\,Q1\_l)\,(Q1\_mo + Q1\_eo) + h^2\,\left(Q1\_p + Q1\_l + \alpha\,Q1\_p + Q1\_a + Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l\right) \tag{96}$$

```
> simplify(Y1-Y1b);
```
$$0 \tag{97}$$

Terme d'ordre 2

```
> Y2 := simplify(coeff(Zr_numer,S,2)) ;
```
$$Y2 := \alpha\,h\,Q1\_p\,Q1\_a + h^3 + h + h\,Q1\_a\,Q1\_l + h^2\,Q1\_p\,Q1\_eo + h^2\,Q1\_mo\,Q1\_l + h^2\,Q1\_a\,Q1\_eo + h^2\,Q1\_eo\,Q1\_l + h^2\,Q1\_p\,Q1\_a\,Q1\_eo\,Q1\_l + h^2\,Q1\_p\,Q1\_mo \tag{98}$$

$$+h^3\,Q1\_p\,Q1\_l+\alpha\,h+h^2\,Q1\_p\,Q1\_a\,Q1\_mo\,Q1\_l+h^2\,Q1\_a\,Q1\_mo$$

```
> Y2b := h^3*(factor(coeff(Y2,h,3)))+h^2*(factor(coeff(Y2,h,2)))+
  h*(factor(coeff(Y2,h,1)));
```

$$Y2b:=h^3\,(1+Q1\_p\,Q1\_l)+h^2\,(Q1\_mo+Q1\_eo)\,(Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l+Q1\_p+Q1\_a+Q1\_l)+h\,\big(Q1\_a\,Q1\_l+1+\alpha+\alpha\,Q1\_p\,Q1\_a\big) \tag{99}$$

```
> simplify(Y2-Y2b);
```

$$0 \tag{100}$$

Terme d'ordre 3

```
> Y3 := simplify(coeff(Zr_numer,S,3)) ;
```

$$Y3:=\alpha\,Q1\_a+h^2\,Q1\_l+h\,Q1\_mo+h\,Q1\_eo+h^2\,Q1\_p+h^2\,Q1\_a+h\,Q1\_a\,Q1\_mo\,Q1\_l+h^2\,Q1\_p\,Q1\_a\,Q1\_l+h\,Q1\_a\,Q1\_eo\,Q1\_l \tag{101}$$

```
> Y3b := h^3*(factor(coeff(Y3,h,3)))+h^2*(factor(coeff(Y3,h,2)))+
  h*(factor(coeff(Y3,h,1)))+alpha*Q1_a;
```

$$Y3b:=h^2\,(Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l+Q1\_p+Q1\_a+Q1\_l)+h\,(Q1\_mo+Q1\_eo)\,(Q1\_a\,Q1\_l+1)+\alpha\,Q1\_a \tag{102}$$

```
> simplify(Y3-Y3b);
```

$$0 \tag{103}$$

Terme d'ordre 4

```
> Y4 := simplify(coeff(Zr_numer,S,4)) ;
```

$$Y4:=h\,Q1\_a\,Q1\_l+h \tag{104}$$

```
> Y4b := h*(1+Q1_a*Q1_l);
```

$$Y4b:=h\,(Q1\_a\,Q1\_l+1) \tag{105}$$

```
> simplify(Y4-Y4b);
```

$$0 \tag{106}$$

Fonction de transfert

```
> Gz := (Y4b*S^4+Y3b*S^3+Y2b*S^2+Y1b*S+Y0)/(X4*S^4+X3b*S^3+X2b*
  S^2+X1b*S+X0);
```

$$Gz:=\Big(h\,(Q1\_a\,Q1\_l+1)\,S^4+\big(h^2\,(Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l+Q1\_p+Q1\_a+Q1\_l)+h\,(Q1\_mo+Q1\_eo)\,(Q1\_a\,Q1\_l+1)+\alpha\,Q1\_a\big)\,S^3+\big(h^3\,(1+Q1\_p\,Q1\_l)+h^2\,(Q1\_mo+Q1\_eo)\,(Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l+Q1\_p+Q1\_a+Q1\_l)+h\,\big(Q1\_a\,Q1\_l+1+\alpha+\alpha\,Q1\_p\,Q1\_a\big)\big)\,S^2+\big(h^3\,(1+Q1\_p\,Q1\_l)\,(Q1\_mo+Q1\_eo)+h^2\,\big(Q1\_p+Q1\_l+\alpha\,Q1\_p+Q1\_a+Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l\big)\big)\,S+h^3\,Q1\_p\,Q1\_l+h^3\Big)\Big/\Big((h\,Q1\_a\,Q1\_l+h)\,S^4+\big(h^2\,(Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l+Q1\_p+Q1\_a+Q1\_l)+h\,Q1\_mo\,(Q1\_a\,Q1\_l+1)+\alpha\,Q1\_a\big)\,S^3+\big(h^3\,(1+Q1\_p\,Q1\_l)+h^2\,Q1\_mo\,(Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l+Q1\_p+Q1\_a+Q1\_l)+h\,\big(Q1\_a\,Q1\_l+1+\alpha+\alpha\,Q1\_p\,Q1\_a\big)\big)\,S^2+\big(h^3\,Q1\_mo\,(1+Q1\_p\,Q1\_l) \tag{107}$$

$$+h^2\left(Q1\_p+Q1\_l+\alpha\,Q1\_p+Q1\_a+Q1\_a\,Q1\_p\,Q1\_l\right)\right)S+h^3\,Q1\_p\,Q1\_l+h^3\right)$$

```
> simplify(Zr-Gz) ;
```

$$0 \tag{108}$$

Cas où on néglige Q1_a et Q1_p

```
> Gz1 := subs(Q1_a=0,Q1_p=0,Gz) ;
```

$$Gz1 := \left(S^4 h+\left(h^2\,Q1\_l+h\,(Q1\_mo+Q1\_eo)\right)S^3+\left(h^3+h^2\,(Q1\_mo+Q1\_eo)\,Q1\_l+h\,(1+\alpha)\right)S^2+\left(h^3\,(Q1\_mo+Q1\_eo)+h^2\,Q1\_l\right)S+h^3\right)\Big/\left(S^4 h+\left(h^2\,Q1\_l+h\,Q1\_mo\right)S^3+\left(h^3+h^2\,Q1\_mo\,Q1\_l+h\,(1+\alpha)\right)S^2+\left(h^3\,Q1\_mo+h^2\,Q1\_l\right)S+h^3\right) \tag{109}$$

Cas où on néglige de plus Q1_l

```
> Gz2 := subs(Q1_l=0,Gz1) ;
```

$$Gz2 := \frac{S^4 h+h\,(Q1\_mo+Q1\_eo)\,S^3+\left(h^3+h\,(1+\alpha)\right)S^2+h^3\,(Q1\_mo+Q1\_eo)\,S+h^3}{S^4 h+S^3 h\,Q1\_mo+\left(h^3+h\,(1+\alpha)\right)S^2+h^3\,S\,Q1\_mo+h^3} \tag{110}$$